Additivité, rapidité, relativité

Jean-Marc Lévy-Leblond [1]
Physique Théorique, Université Paris VII, France

Jean-Pierre Provost [2]
Physique Théorique, Université de Nice, France
(Reçu le 22 Mai 1978 ; accepté le 8 Août 1979)
Traduit de l'anglais par Olivier Castéra

Un théorème simple et profond des mathématiques standard affirme l'existence, pour n'importe quel groupe différentiable à un paramètre, d'un paramètre additif, tel que l'angle de rotation et le paramètre de rapidité pour les transformations de Lorentz. L'importance de ce théorème pour les applications de la théorie des groupes en physique est mise en évidence, et une preuve élémentaire est donnée. Le théorème est alors appliqué à la construction des groupes relativistes possibles à partir de principes premiers.

Introduction

La relativité restreinte est habituellement introduite par les formules de transformation de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \tag{1}$$

exprimées en terme de vitesse relative v de deux référentiels (nos unités sont telles que $c = 1$). Ces formules, nous devons l'admettre, ne sont pas très élégantes et semblent souvent compliquées pour un étudiant. Elles impliquent de nouvelles et étranges propriétés de la vitesse : existence d'une vitesse limite c, et la loi de composition curieuse :

$$v_{12} = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2). \tag{2}$$

Au niveau suivant, on présente à l'étudiant, du moins dans les cours modernes, le paramètre de *rapidité* φ défini par

$$v = \tanh \varphi \tag{3}$$

dans les termes duquel, les formules de Lorentz prennent la forme simple

$$\begin{cases} x' = \cosh \varphi x - \sinh \varphi t \\ t' = \cosh \varphi t - \sinh \varphi x, \end{cases} \tag{4}$$

et la loi de composition devient

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi 2. \tag{5}$$

1. Adresse actuelle : Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Université Paris VII (Tour 33), 2 Place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05, France.
2. Adresse actuelle : Laboratoire de Physique Théorique, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France.

L'additivité de la rapidité exhibe immédiatement la propriété de groupe fondamentale des transformations de Lorentz.

La rapidité n'est pas seulement un paramètre pratique. Son introduction dans l'enseignement de la relativité d'Einstein accentue la nécessité de remplacer la vitesse Galiléenne par deux concepts séparés : la « vitesse » v, qui exprime le taux de variation de la position avec le temps, et la « rapidité » φ, en tant que paramètre naturel de groupe (additif)[3]. Insister sur cette distinction aide à éliminer les difficultés. Par exemple, les étudiants demandent souvent si l'existence d'une vitesse limite c (pour les particules matérielles) n'implique pas l'existence d'un « référentiel limite », qui contredirait le principe de relativité. Ils se demandent aussi comment le fait de considérer des vitesses plus grandes que c (pour des objets « immatériels », comme les ombres—ou les tachyons) peut être consistant avec la relativité d'Einstein. Ces pseudoparadoxes disparaissent lorsque l'on réalise que le paramètre intrinsèque de la loi de groupe exprimant la transformation d'un référentiel à un autre, est la rapidité, qui n'a pas de limite et peut augmenter indéfiniment, tandis qu'au contraire, il n'y a pas de rapidité, c.-à-d., pas de changement de référentiel, associée aux vitesses superluminiques[4]. Au delà de son utilité pédagogique, la rapidité est devenue ces dernières années, un outil commun et efficace en physique des particules.

Il semble utile, pour ces raisons, d'introduire la rapidité le plus tôt possible dans l'enseignement de la relativité, plus précisément, dès le début. Il n'y a aucune raison d'établir les expressions des transformations de Lorentz en utilisant la vitesse, et ensuite de « découvrir » les élégantes propriétés de la rapidité comme si elles résultaient d'une circonstance heureuse et imprévisible. En effet, il existe un profond, sinon simple, théorème mathématique qui établit par avance la nécessité d'un tel paramètre. Le théorème affirme l'existence d'un paramètre additif pour tout groupe à un paramètre (différentiable et connexe). Malheureusement, ce théorème, malgré son importance et sa simplicité, est habituellement introduit en connexion avec l'étude générale des groupes de Lie et leurs algèbres, demandant des mathématiques assez élaborées, inadaptées aux besoins de la physique élémentaire. Le sujet de cet article est de donner une preuve simple de ce théorème, de l'illustrer par des exemples élémentaires, et de l'utiliser comme base pour dériver la théorie relativiste. Au delà de cette utilisation spécifique, les considérations présentes peuvent aussi être vues comme une introduction à d'importantes idées de la théorie des groupes qui joue un rôle essentiel dans la physique théorique contemporaine.

L'article est organisé comme suit. Dans la Sec. I, le théorème est énoncé et prouvé. La Section II est dévolue à quelques exemples. La Section III utilise le théorème pour présenter une dérivation de la théorie relativiste, pour une dimension d'espace, à partir de principes premiers, alternative à une récente proposition. La nouvelle dérivation permet une généralisation directe à trois dimensions d'espace, qui est présentée en Sec. IV.

---

3. Voir, par exemple, J.-M. Lévy-Leblond, Riv. Nuovo Cimento **7,** 187 (1977) et J.-M. Lévy-Leblond (publication à venir).

4. Quand $v > 1$, la formule (3) donne une valeur complexe et par conséquent indéterminée de φ. Une autre façon de comprendre la restriction $v < 1$ des vitesses des référentiels, sans invoquer l'appartenance aux réels de φ, est de remarquer que la loi d'addition (2) est une loi de groupe seulement si les v sont inférieures à un. L'importance des hypothèses de la loi de groupe sera développée dans la Sec. III.

I. THÉORÈME DU PARAMÈTRE ADDITIF

Considérons un ≪ groupe à un paramètre ≫, c.-à-d., un groupe G, dont les éléments sont étiquetés par des nombres réels. En termes plus rigoureux, le groupe G est supposé être en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble connexe S de R, ce qui signifie que l'ensemble des paramètres S est simplement un morceau de la droite réelle, fini ou non. Par exemple, $S =]-\infty, +\infty[$, si G est le groupe des translations avec la longueur de translation comme paramètre, et $S =]-c, +c[$ si G est le groupe de Lorentz avec la vitesse comme paramètre. On note $g(x)$, $x \in S$, l'élément générique de G. La structure de groupe requiert l'existence d'une loi de composition : le produit $g(x)g(y)$ de deux éléments de G est un élément de G étiqueté par un paramètre qui est une fonction de x et y, et qui sera noté $x * y$.

$$g(x)g(y) = g(x * y) \tag{6}$$

On doit aussi identifier chaque élément de G avec son paramètre x, en considérant le groupe comme étant l'ensemble S doté de la loi de composition $*$. Cette loi, bien sûr, satisfait les axiomes de groupe, c'est à dire
1) associativité [5] :

$$(x * y) * z = x * (y * z), \tag{7}$$

2) existence d'un élément neutre [6] (identité) e :

$$e * x = x * e = x, \tag{8}$$

3) existence d'un inverse [7] $\bar{x}$ pour tout élément x :

$$x * \bar{x} = \bar{x} * x = e. \tag{9}$$

On suppose maintenant que la loi de composition a la propriété d'être régulière. Plus précisément, on demande que la fonction f_x de multiplication à gauche par x,

$$f_x(y) \stackrel{df}{=} x * y, \tag{10}$$

5. NDT

$$\begin{aligned}[g(x)g(y)]g(z) &= g(x)[g(y)g(z)] \\ g(x * y)g(z) &= g(x)g(y * z) \\ g[(x * y) * z] &= g[x * (y * z)] \\ (x * y) * z &= x * (y * z)\end{aligned}$$

6. NDT

$$\begin{aligned}g(e)g(x) = g(x)g(e) &= g(x) \\ g(e * x) = g(x * e) &= g(x) \\ e * x = x * e &= x\end{aligned}$$

7. NDT

$$\begin{aligned}g(x)g(\bar{x}) = g(\bar{x})g(x) &= g(e) \\ g(x * \bar{x}) = g(\bar{x} * x) &= g(e) \\ x * \bar{x} = \bar{x} * x &= e\end{aligned}$$

possède une dérivée première, et que cette dernière diffère de zéro pour l'élément neutre

$$f'_x(e) \neq 0. \tag{11}$$

En écrivant la propriété d'associativité de la sorte [8]

$$f_{x*y}(z) = f_x[f_y(z)] \tag{12}$$

et en differenciant par rapport à z au point $z = e$, on a, en prenant en compte [9] $f_y(e) = y$:

$$f'_{x*y}(e) = f'_x(y) f'_y(e). \tag{13}$$

La condition ci-dessus (11) implique par conséquent que $f'_x(y) \neq 0$ pour tout $y \in S$ (car en (13) $f'_{x*y}(e) \neq 0$ et $f'_y(e) \neq 0$), si bien que nous avons [10] $f_x(y_1) \neq f_x(y_2)$, donc $x * y_1 \neq x * y_2$ chaque fois que $y_1 \neq y_2$. Pour cette raison, une paramétrisation ayant les propriétés de régularité (10)-(11) ci-dessus, sera appelée une paramétrisation ≪ essentielle ≫.

Bien sûr, l'étiquetage du groupe est arbitraire. Si l'on considère par exemple le groupe de Lorentz, nous pouvons de façon équivalente caractériser une transformation de Lorentz donnée, par sa vitesse v, ou par sa rapidité φ, ou par son ≪ moment ≫ $v(1 - v^2)^{-1/2} = \sinh \varphi$. Savoir s'il y a une paramétrisation *naturelle* pour le groupe abstrait G, est précisément la question que l'on considère ici. Un changement général de paramétrisation peut être défini par une certaine fonction différentiable λ telle que λ^{-1} existe aussi. Les éléments du groupe sont maintenant étiquetés par $\xi = \lambda(x)$, $\eta = \lambda(y)$, etc., et la loi de composition est donnée par [11]

$$\xi o \eta = \lambda[\lambda^{-1}(\xi) * \lambda^{-1}(\eta)]. \tag{14}$$

Le théorème du paramètre additif, que l'on démontre maintenant, stipule principalement qu'il est toujours possible de choisir convenablement λ tel que la loi o soit simplement l'addition ordinaire des nombres réels ; c'est à dire, une fonction λ telle que

$$\lambda(x * y) = \lambda(x) + \lambda(y). \tag{15}$$

8. NDT Avec (10) et (7) on a

$$f_{x*y}(z) = (x * y) * z = x * (y * z)$$
$$f_x[f_y(z)] = f_x(y * z) = x * (y * z)$$

9. NDT

$$f'_{x*y}(z) = \{f_x[f_y(z)]\}' = f'_x[f_y(z)] f'_y(z)$$
$$f'_{x*y}(e) = f'_x[f_y(e)] f'_y(e) = f'_x(y) f'_y(e)$$

10. NDT En effet, lorsque la dérivée est non nulle, les points d'abscisses différentes ne peuvent avoir même ordonnée.

11. NDT En remplaçant ξ et η,

$$\begin{aligned} \lambda(x) o \lambda(y) &= \lambda\{\lambda^{-1}[\lambda(x)] * \lambda^{-1}[\lambda(y)]\} \\ &= \lambda(x * y) \end{aligned}$$

En différentiant (15) par rapport à y, nous obtenons l'équation suivante[12] pour λ :

$$\lambda'(x * y) \cdot f'_x(y) = \lambda'(y), \tag{16}$$

et en remarquant que l'identité (13) fournit directement une solution pour cette équation, soit[13] :

$$\lambda'(x) = f'_x(e)^{-1}. \tag{17}$$

La fonction λ définie par

$$\lambda(x) = \int_e^x [f'_t(e)]^{-1} dt, \tag{18}$$

obéit donc à la propriété additivive (15). La borne inférieure e dans l'intégrale est bien sûr dictée par la condition $\lambda(e) = 0$, conséquence immédiate de la loi d'addition[14].

Cette paramétrisation est-elle unique ? Appelons ξ, η, etc. les paramètres additifs. Supposons qu'il existe une autre paramétrisation additive ξ', η', etc., donnée en termes de la première par une certaine fonction μ : $\xi' = \mu(\xi)$, elle doit obéir à

$$\mu(\xi + \eta) = \mu(\xi) + \mu(\eta). \tag{19}$$

Il en résulte que μ est une fonction linéaire

$$\mu(\xi) = k\xi, \tag{20}$$

c.-à-d., la paramétrisation additive est unique à une constante multiplicative près. En fait, cette constante peut être incluse dans l'expression (18) sans altérer ses propriétés (15).

En conclusion, nous avons prouvé que sous l'hypothèse de la paramétrisation essentielle, tout groupe uni-dimensionnel, connexe et différentiable, est isomorphe au groupe additif des nombres réels. En particulier, ce résultat implique que le groupe est

---

12. NDT Le prime désignant la dérivation par rapport à y,

$$\begin{aligned}
[\lambda(x * y)]' &= \lambda'(x) + \lambda'(y) \\
[\lambda(f_x(y))]' &= \lambda'(y) \\
\lambda'[f_x(y)] \cdot f'_x(y) &= \lambda'(y) \\
\lambda'(x * y) \cdot f'_x(y) &= \lambda'(y)
\end{aligned}$$

13. NDT En partant de (13),

$$\begin{aligned}
f'_{x*y}(e) &= f'_x(y) f'_y(e) \\
[f'_{x*y}(e)]^{-1} f'_x(y) &= [f'_y(e)]^{-1}
\end{aligned}$$

On retrouve (16) si l'on pose $\lambda'(x * y) = [f'_{x*y}(e)]^{-1}$ et $\lambda'(y) = [f'_y(e)]^{-1}$, autrement dit si $\lambda'(x) = f'_x(e)^{-1}$.

14. NDT Avec (15),

$$\begin{aligned}
\lambda(x * y) &= \lambda(x) + \lambda(y) \\
\lambda(x * e) &= \lambda(x) + \lambda(e) \\
\lambda(x) &= \lambda(x) + \lambda(e)
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lambda(e) = 0$.

abélien, ce qui est loin d'être évident *a priori*[15].
Il existe des groupes importants sans paramétrisation essentielle différentiable. Le groupe des rotations dans le plan est un exemple ; on peut choisir un paramètre additif, l'angle, mais soit l'on restreint ses valeurs à $[0, 2\pi]$ et l'on perd la différentiabilité, ou l'on prend l'ensemble des nombres réels et l'on perd l'unicité de la paramétrisation. Cependant, quand la paramétrisation n'est pas essentielle mais que $f'_x(e)$ diffère de zéro dans un voisinage de l'identité, l'isomorphisme existe dans un tel voisinage. Le résultat général, que nous n'allons pas prouver, dit que tout groupe uni-dimensionnel, connexe et différentiable, est isomorphe soit à $\mathbf{R}$ (la droite réelle) soit à $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (le cercle, comme le groupe des rotations planes). On peut même abandonner l'hypothèse de différentiabilité et garder seulement une mesurabilité locale de la fonction f_x. Un beau contre-exemple, qui montre les limites du théorème est le suivant. Considérons un groupe a deux paramètres, pas nécessairement abélien, par exemple le groupe uni-dimensionnel des translations-dilatations. Puisque $\mathbf{R}^2$ a la même cardinalité que $\mathbf{R}$, nous pouvons toujours remplacer les deux paramètres réels du groupe par un seul en utilisant une bijection (comme cette vieille astuce qui consiste à combiner deux nombres réels sous leur forme décimale en écrivant un seul nombre dont les chiffres pairs et impairs sont ceux des deux nombres). Le groupe est alors un groupe à ≪ un paramètre ≫ (sans signification physique, bien sûr). Cependant, comme aucune fonction bijective $\mathbf{R}^2 \leftrightarrow \mathbf{R}$ ne peut être mesurable, les conditions du théorème ne peuvent être remplies, et au total il n'y a pas de paramètre additif—et heureusement, car le groupe n'est pas abélien !

II. QUELQUES EXEMPLES

A. Considérons le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^\times$ des nombres réels (positifs). Nous avons[16]

$$f_x(y) = xy,\ e = 1,\ f'_t(e) = t. \tag{21}$$

Le paramètre additif, dont l'existence est garantie par le théorème, est donné explicitement par la formule (17) :

$$\lambda(x) = \int_t^x t^{-1} dt = \ln x \tag{22}$$

Bien sûr, ce n'est rien d'autre que la définition de la fonction logarithme Népérien, dont la principale propriété est de réaliser l'isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres réels positifs avec le groupe additif des nombres réels.

15. Notons aussi que l'existence d'un inverse n'a pas été utilisé dans la démonstration. Par conséquent, un semi-groupe différentiable et connexe est isomorphe au semi-groupe additif des nombres réels positifs.
16. NDT

$$f_t(y) = ty$$
$$f'_t(y) = t$$
$$f'_t(e) = t$$

B. Les matrices 2×2 réelles, symétriques et unimodulaires forment un groupe ; l'élément générique peut s'écrire :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a^2 - b^2 = 1, \ a \geqslant 1 \tag{23}$$

Prenons b comme paramètre du groupe, avec $a = (1+b^2)^{1/2}$, la loi de groupe s'écrit [17]

$$b * b' = (1+b^2)^{1/2} b' + b(1+b'^2)^{1/2}. \tag{24}$$

On a [18]

$$\begin{aligned} f_x(y) &= (1+x^2)^{1/2} y + x(1+y^2)^{1/2}, \\ e = 0, \ f'_t(e) &= (1+t^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Un paramètre additif existe et est donné par

$$\varphi(b) = \int_0^b (1+t^2)^{-1/2} dt = \operatorname{arg\,sinh} b. \tag{26}$$

Nous avons alors

$$b = \sinh \varphi, \ a = \cosh \varphi, \tag{27}$$

si bien que les éléments du groupe s'écrivent

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Ce groupe abstrait peut être considéré comme étant le groupe de Lorentz à une dimension d'espace, φ étant maintenant la rapidité ; nous examinerons ce groupe d'un point de vue plus physique dans la section suivante [19].

Il existe une autre façon de dériver l'expression (28), en évitant pour les étudiants l'intégration (26). Il suffit de supposer l'existence d'un paramètre additif φ et d'exprimer la loi de groupe à partir de ce paramètre :

$$M(\varphi) M(\varphi') = M(\varphi + \varphi'). \tag{29}$$

---

17. NDT La multiplication de deux matrices M et M' donne

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} (1+b'^2)^{1/2} & b' \\ b' & (1+b'^2)^{1/2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (1+b^2)^{1/2} & b \\ b & (1+b^2)^{1/2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & (1+b^2)^{1/2} b' + b(1+b'^2)^{1/2} \\ . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

18. NDT

$$\begin{aligned} b * e &= (1+b^2)^{1/2} e + b(1+e^2)^{1/2} \\ &= b \ ssi \ e = 0 \end{aligned}$$

19. NDT Si l'on prend a comme paramètre du groupe alors $b = (a^2-1)^{1/2}$ et

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a' & (a'^2-1)^{1/2} \\ (a'^2-1)^{1/2} & a' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & (a^2-1)^{1/2} \\ (a^2-1)^{1/2} & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} aa' + (a^2-1)^{1/2}(a'^2-1)^{1/2} & . \\ . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette équation matricielle donne :

$$\begin{cases} a(\varphi+\varphi') = a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)b(\varphi') \\ b(\varphi+\varphi') = b(\varphi)a(\varphi') + a(\varphi)b(\varphi') \end{cases} \tag{30}$$

Définissons

$$\begin{cases} u(\varphi) = a(\varphi) + b(\varphi) \\ v(\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi) \end{cases} \tag{31}$$

Ces fonctions obéissent alors à :

$$\begin{cases} u(\varphi+\varphi') = u(\varphi)u(\varphi') \\ v(\varphi+\varphi') = v(\varphi)v(\varphi') \end{cases} \tag{32}$$

si bien que ce sont des fonctions exponentielle. La condition d'unimodularité $a^2-b^2=1$ s'écrit

$$u(\varphi)v(\varphi) = 1, \tag{33}$$

donc u et v sont des exponentielles inverses :

$$\begin{cases} u(\varphi) = \exp(k\varphi) \\ v(\varphi) = \exp(-k\varphi) \end{cases} \tag{34}$$

qui donne à son tour

$$\begin{cases} a(\varphi) = \cosh(k\varphi) \\ b(\varphi) = \sinh(k\varphi) \end{cases} \tag{35}$$

en accord, bien sûr, avec (28) (au facteur constant autorisé k près).

C. Les matrices 2×2 réelles antisymétriques unimodulaires

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1 \tag{36}$$

forment aussi un groupe, le groupe des rotations planes. Mais, à cause de l'ambiguïté de signe, $a = \pm(1-b^2)^{1/2}$, la paramétrisation par b n'est pas essentielle. Cependant, dans un voisinage de l'identité (caractérisé par $b=0$, $a=1$), la loi de groupe donne

$$b * b' = (1-b^2)^{1/2}b' + b(1-b'^2)^{1/2}. \tag{37}$$

On a

$$\begin{aligned} f_x(y) &= xy + (x^2-1)^{1/2}(y^2-1)^{1/2} \\ f_t(y) &= ty + (t^2-1)^{1/2}(y^2-1)^{1/2} \\ f_t'(y) &= t + (t^2-1)^{1/2}(y^2-1)^{-1/2}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a * e &= ae + (a^2-1)^{1/2}(e^2-1)^{1/2} \\ &= a \; ssi \; e = 1 \end{aligned}$$

On a alors $f_t'(e) = t + (t^2-1)^{1/2}(1-1)^{-1/2}$ qui donne une division par zéro.

On a

$$f_x(y) = (1-x^2)^{1/2}y + x(1-y^2)^{1/2},$$
$$e = 0,\ f'_t(e) = (1-t^2)^{1/2} \tag{38}$$

(En effet, il est clair que pour $t = 1$, $f'_t(e) = 0$).
Le paramètre additif est donné par

$$\theta(b) = \int_0^b (1-t^2)^{-1/2} dt = \arcsin b. \tag{39}$$

Nous avons donc

$$b = \sin\theta,\ a = \cos\theta, \tag{40}$$

et

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{41}$$

si bien que le groupe s'identifie au groupe des rotations dans le plan, en accord avec le théorème général.

On peut aussi postuler l'existence de θ et dériver toutes les propriétés connues des fonctions a (cosinus) et b (sinus) de la loi de groupe satisfaite par les matrices M.

III.GROUPES RELATIVISTES EN UNE DIMENSION D'ESPACE

Nous allons maintenant utiliser le théorème du paramètre additif pour établir la théorie de la relativité à partir de principes premiers. La discussion est ici limitée à une dimension d'espace ; la Sec. IV la généralisera à trois dimensions d'espace. Nous cherchons des transformations d'espace-temps qui connectent deux référentiels inertiels, satisfaisant les conditions suivantes : (i) elles préservent l'homogénéité de l'espace-temps ; (ii) elles forment un groupe ; (iii) elles sont compatibles avec la réflexion d'espace ; et (iv) elles permettent une certaine notion de causalité. Il a déjà été montré ailleurs [20] que ces hypothèses sont suffisantes pour dériver les transformations de Lorentz (et leurs cousines dégénérées, les transformations de Galilée). En particulier, il n'y a pas besoin d'un postulat concernant la constance de la vitesse de la lumière. Le lecteur pourra se référer à un travail précédent pour une discussion sur la signification physique des nouveaux postulats [20].

La condition d'homogénéité (i) est équivalente à la linéarité des transformations dans l'espace-temps. Nous pouvons donc écrire ces transformations sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = M(\varphi) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{42}$$

où nous supposons que les transformations dépendent d'un seul paramètre (voir une discussion à ce propos dans le premier article Réf. 4) que l'on choisit additif, en accord avec le théorème fondamental, si bien que les matrices $M(\varphi)$ obéissent à

$$\begin{cases} M(\varphi+\varphi') = M(\varphi)M(\varphi') & (a) \\ M^{-1}(\varphi) = M(-\varphi) & (b) \\ M(0) = I. & (c) \end{cases} \tag{43}$$

20. J.-M. Lévy-Leblond, Am. J. Phys. **44,** 271 (1976), A. R. Lee et T. M. Kalotas, Am. J. Phys. **43,** 434 (1975), et des références additionnelles dans ces papiers.

Si l'on change la direction des axes d'espace, la transformation étiquetée par φ est alors représentée par la matrice [21]

$$\hat{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Cet ensemble de matrices forme bien entendu un groupe isomorphe au groupe original. La condition de symétrie par réflexion d'espace nécessite maintenant que les deux groupes soient identiques (et pas seulement isomorphes) ; à savoir, il doit exister un paramètre $\check{\varphi}$, dépendant de φ, tel que

$$\hat{M}(\varphi) = M(\check{\varphi})$$

avec

$$\check{\varphi} = \chi(\varphi). \tag{45}$$

Autrement dit,

$$\hat{M}(\varphi) = M[\chi(\varphi)]$$

Puisque φ est un paramètre additif pour le groupe des matrices $\hat{M}$, il est clair que χ doit être une fonction additive de φ. En effet, de la relation précédente on dérive

$$\begin{aligned} M[\chi(\varphi+\varphi')] &= \hat{M}(\varphi+\varphi') = \hat{M}(\varphi) + \hat{M}(\varphi') \\ &= M[\chi(\varphi)] + M[\chi(\varphi')] \\ &= M[\chi(\varphi) + \chi(\varphi')]. \end{aligned} \tag{46}$$

Il en résulte que [22]

$$\check{\varphi} = \kappa\varphi. \tag{47}$$

Si l'on change maintenant deux fois l'orientation des axes d'espace, nous devons retrouver la paramétrisation originale, telle que $\kappa^2 = 1$. Le cas $\kappa = 1$ est trivial, puisque l'équation $M(\varphi) = \hat{M}(\varphi)$ mène à $b = c = 0$, c'est à dire, pas de relation entre espace et temps. Il nous reste donc la condition

$$\hat{M}(\varphi) = M(-\varphi) \quad (= M^{-1}(\varphi)\ (43b)). \tag{48}$$

D'après (44), la dernière relation est à l'origine des propriétés de parité des fonctions a, b, c, et d :

$$\begin{aligned} a(-\varphi) &= a(\varphi) \qquad & b(-\varphi) &= -b(\varphi) \\ c(-\varphi) &= -c(\varphi) \qquad & d(-\varphi) &= d(\varphi) \end{aligned} \tag{49}$$

21. NDT J.-M. Lévy-Leblond, Am. J. Phys. **44,** 271 (1976), de l'équation (10) à (12).
22. NDT En partant de (46),

$$\begin{aligned} M[\chi(\varphi+\varphi')] &= M[\chi(\varphi)+\chi(\varphi')] \\ \chi(\varphi+\varphi') &= \chi(\varphi)+\chi(\varphi') \end{aligned}$$

La fonction χ est donc une multiplication par un nombre : $\chi(\varphi) = \kappa\varphi$.

Avec les égalités [23] $\det \hat{M}(\varphi) = \det M(\varphi)$ et [24] $\det M(-\varphi) = [\det M(\varphi)]^{-1}$, cette relation mène aussi à la propriété d'unimodularité des matrices [25] M

$$\det M(\varphi) = 1. \tag{50}$$

Par conséquent, (48) devient [26]

$$\begin{pmatrix} a(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\varphi) & -b(\varphi) \\ -c(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{51}$$

De (51) [27] nous inférons

$$a = d, \; a^2 - bc = 1. \tag{52}$$

Considérons maintenant la loi de multiplication (43a). Nous pouvons en particulier écrire [28]

$$a(\varphi + \varphi') = a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)c(\varphi'). \tag{53}$$

Puisque cette loi est commutative, nous devons avoir l'égalité [29]

$$b(\varphi)c(\varphi') = b(\varphi')c(\varphi) \tag{54}$$

autrement dit

$$\frac{c(\varphi)}{b(\varphi)} = \frac{c(\varphi')}{b(\varphi')} = C^{ste}, \tag{55}$$

si bien que b et c sont deux fonctions proportionnelles—à moins que l'une ne soit nulle. La constant de proportionnalité peut être ajustée à 1 ou -1. En effet, changer l'échelle d'espace d'un facteur h :

$$x \to hx, \tag{56}$$

---

23. NDT calculer $\det \hat{M}(\varphi)$ avec (44)
24. NDT avec (43b) et la propriété suivante des déterminants, $\forall M$, $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$
25. NDT D'après (48) $\hat{M}(\varphi) = M(-\varphi)$. Or, $\det \hat{M}(\varphi) = \det M(\varphi)$ et $\det M(-\varphi) = \det M^{-1}(\varphi) = [\det M(\varphi)]^{-1}$, donc $\det M(\varphi) = [\det M(\varphi)]^{-1} = 1$.
26. NDT en fait, $\hat{M}(\varphi) = M^{-1}(\varphi)$
27. NDT et ensuite avec (50)
28. NDT

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a(\varphi') & b(\varphi') \\ c(\varphi') & d(\varphi') \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a(\varphi+\varphi') & b(\varphi+\varphi') \\ c(\varphi+\varphi') & d(\varphi+\varphi') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)c(\varphi') & . \\ . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

29. NDT

$$M(\varphi + \varphi') = M(\varphi)M(\varphi') = M(\varphi')M(\varphi)$$

Par conséquent,

$$a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi)c(\varphi') = a(\varphi)a(\varphi') + b(\varphi')c(\varphi)$$
$$b(\varphi)c(\varphi') = b(\varphi')c(\varphi)$$

correspond, d'après (42) aux transformations suivantes des fonctions b et c et de leur quotient[30]

$$b \to h^{-1}b,\ c \to hc,\ \frac{c}{b} \to h^2\frac{c}{b}. \tag{57}$$

Par conséquent, quatre cas peuvent être distingués
① $\underline{b = c}$: Les matrices M sont des matrices unimodulaires du type

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{58}$$

On retrouve le *groupe de Lorentz* (voir Sec. II B)
② $\underline{b = -c}$: Les matrices M sont des matrices unimodulaires du type

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ -b(\varphi) & a(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Le groupe (voir Sec. II C) est un *groupe de rotation*—dans l'espace-temps !
③ $\underline{b = 0}$: La propriété de modularité (52) implique que $a = 1$. Les matrices M sont du type

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(\varphi) & 1 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

La loi de groupe donne

$$c(\varphi + \varphi') = c(\varphi) + c(\varphi') \tag{61}$$

ou

$$c(\varphi) = \gamma\varphi. \tag{62}$$

Le groupe correspondant est le *groupe de Galilée* avec un paramètre sans dimension φ (et γ une unité arbitraire de vitesse).
④ $\underline{c = 0}$: En procédant comme dans ③ nous obtenons

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \beta\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

qui est la définition du *groupe de Carroll*.

Nous introduisons maintenant la condition de causalité[20] selon laquelle il existe

30. NDT Si l'on effectue une dilatation de l'espace identique dans chacun des référentiels, rien ne doit changer, en particulier le rapport c/b doit rester le même.

$$\begin{pmatrix} t \\ hx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ hx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at + bhx \\ ct + dhx \end{pmatrix}$$

$$t' = at + bhx$$
$$x' = \frac{c}{h}t + dx$$

Il faut donc que $b \to b/h$ et $c \to ch$ pour avoir les mêmes équations.

certaines paires d'évènements tels que leur intervalle de temps Δt garde le même signe dans tous les référentiels, c.-à-d., restent invariant par les transformations quelle que soit φ. Cette condition suffit à rejeter les cas ② et ④. Les groupes de Lorentz et de Galilée restent alors les seuls groupes physiques de la relativité possibles dans l'espace-temps.

IV. GROUPES RELATIVISTES EN TROIS DIMENSIONS D'ESPACE

Le théorème du paramètre additif permet une généralisation facile à trois dimensions d'espace de la dérivation précédente. Nous écrivons la transformation d'espace de la sorte

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) \\ c(\varphi) & d(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = M(\varphi) \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \tag{64}$$

où a, b, c, d sont maintenant, respectivement, des matrices 1×1, 1×3, 3×1 et 3×3. Toutes les expressions de la Sec. III jusqu'à (50) restent alors valides. Cependant, la dérivation algébrique précédente, qui ne nécessite pas de technique de différentiation, devient superflue en trois dimensions d'espace et nous préférons une approche infinitésimale, qui est en effet plus proche des méthodes avancées reposant sur les algèbres de Lie (cette méthode, bien sûr, marche aussi dans le cas précédent à une dimension).

Considérons la loi multiplicative (43a). En dérivant par rapport à φ' et en posant $\varphi' = 0$, nous obtenons l'égalité suivante [31]

$$M'(\varphi) = M(\varphi)M'(0), \tag{65}$$

où la matrice dérivée est

$$M'(\varphi) = \begin{pmatrix} a'(\varphi) & b'(\varphi) \\ b'(\varphi) & d'(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Pour $\varphi = 0$, d'après (49), nous voyons que [32]

$$M'(0) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

où

$$\beta = b'(0),\ \gamma = c'(0) \tag{68}$$

31. NDT

$$\begin{aligned} M(\varphi + \varphi') &= M(\varphi)M(\varphi') \\ \frac{d}{d\varphi'}[M(\varphi + \varphi')] &= \frac{d}{d\varphi'}[M(\varphi)]M(\varphi') + M(\varphi)\frac{d}{d\varphi'}[M(\varphi')] \\ M'(\varphi + \varphi') &= M(\varphi)M'(\varphi') \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à poser $\varphi' = 0$ pour avoir $M'(\varphi) = M(\varphi)M'(0)$.

32. NDT $a(-\varphi) = a(\varphi)$ et $d(-\varphi) = d(\varphi)$, ces fonctions sont donc paires et leurs dérivées sont par conséquent nulles en zéro.

(n'oublions pas que β et γ sont des matrices 1×3 et 3×1, c'est à dire, des vecteurs ≪ ligne ≫ et ≪ colonne ≫, respectivement). La relation (65) donne maintenant un ensemble d'équations différentielles [33]

$$\begin{aligned} a' = b\gamma,\ b' = a\beta \\ c' = d\gamma,\ d' = c\beta \end{aligned} \tag{69}$$

dont on déduit l'équation [34]

$$a'' = \beta\gamma a. \tag{70}$$

($\beta\gamma$ est le produit scalaire des vecteurs β et γ.) La fonction a est par conséquent de type exponentiel. La solution spécifique à sélectionner est dictée par la propriété de parité (49) et par la condition initiale (43c). Un argument similaire s'applique au calcul initial de b, c, d. La nature des solutions dépend du signe de $\beta\gamma$, ou de sa nullité. Puisque un changement d'échelle dans le paramètre additif multiplie $\beta\gamma$ par un nombre positif [35], nous sommes amené à considérer les cas suivants :

① $\underline{\beta\gamma = 1}$. Nous obtenons [36]

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta \\ (\sinh\varphi)\gamma & 1 + (\cosh\varphi - 1)\gamma\beta \end{pmatrix}. \tag{71}$$

② $\underline{\beta\gamma = -1}$. Il suffit de remplacer dans (71) les fonctions hyperboliques par les fonctions ordinaires sinus et cosinus.

---

33. NDT $M'(\varphi) = M(\varphi)M'(0)$, donc,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b\gamma & a\beta \\ d\gamma & c\beta \end{pmatrix} \end{array}$$

34. NDT $a' = b\gamma$ donc $a'' = b'\gamma + b\gamma'$. Or $b' = a\beta$ et $\gamma' = c''(0) = 0$, donc $a'' = \beta\gamma a$.

35. NDT Cette affirmation ne m'étant pas évidente a priori, je refais plus loin la démonstration sans m'en servir

36. NDT En se rappelant que $\beta\gamma$ est un scalaire tandis que $\gamma\beta$ est une matrice 3×3 :
① $\underline{\beta\gamma > 0}$.
$a'' = \beta\gamma a$ et $a(-\varphi) = a(\varphi)$ donc $a = A\cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)$.
Avec (43c), $a(0) = 1$ donc $A = 1$ et $a = \cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)$.
$b' = a\beta = \cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)\beta$ donc $b = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}[\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi) + b_1]\beta + b_2$.
Avec (43c), $b(0) = 0$ donc $b_1 = b_2 = 0$ et $b = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi\beta)$.
$c' = d\gamma$ donc $c'' = d'\gamma + d\gamma'$. Or $d' = c\beta$ et $\gamma' = c''(0) = 0$, donc $c'' = c\beta\gamma$.
De plus $c(-\varphi) = -c(\varphi)$, d'où $c = C\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)$.
$\gamma = c'(0) = C\sqrt{\beta\gamma}$ donc $C = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta\gamma}}$ et $c = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta\gamma}}\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)\gamma$.
$d' = c\beta = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)\gamma\beta$ d'où $d = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}[\cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi) + d_1]\gamma\beta + d_2$.
Or d'après (43c) $d(0) = 1$, donc $(1+d_1)\gamma\beta + d_2 = 1$, d'où $d_1 = -1$ et $d_2 = 1$, et par conséquent $d = 1 + \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}[\cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi) - 1]\gamma\beta$.

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi) & (1/\sqrt{\beta\gamma})\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)\beta \\ (1/\sqrt{\beta\gamma})\sinh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi)\gamma & 1 + (1/\sqrt{\beta\gamma})[\cosh(\sqrt{\beta\gamma}\varphi) - 1]\gamma\beta \end{pmatrix}.$$

③ $\underline{\beta\gamma = 0}$. L'intégration donne[37]

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi\beta \\ \varphi\gamma & 1 + \frac{1}{2}\varphi^2\gamma\beta \end{pmatrix}. \tag{72}$$

La condition de causalité élimine maintenant le cas ② et impose $\beta = 0$ dans le cas ③. Il nous reste deux cas seulement :
ⓐ $\beta = 0$, qui donne les transformations de Galilée en trois dimensions

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi\gamma & 1 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

où le vecteur γ définit la direction de la transformation Galiléenne.
ⓑ cas①. Pour écrire la matrice (71) sous une forme plus familiaire, effectuons un changement arbitraire de coordonnées d'espace par une matrice[38] T.
La matrice de transformation M devient alors[39] :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} M(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta T^{-1} \\ (\sinh\varphi)T\gamma & [1 + (\cosh\varphi - 1)]T\gamma\beta T^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{74}$$

---

37. NDT $a'' = \beta\gamma a = 0$. Donc $a' = C^{ste}$. D'après (67) $a'(0) = 0$ donc $a'(\varphi) = 0$. Par conséquent $a = C^{ste}$, et d'après (43c) $a(0) = 1$, donc $a(\varphi) = 1$.
$b' = a\beta = \beta = b'(0) = C^{ste}$. Donc $b = \varphi\beta$.
$c' = d\gamma$ d'où $c'' = d'\gamma + d\gamma' = c\beta\gamma = 0$, donc $c' = C^{ste} = c'(0) = \gamma$, et donc $c = \varphi\gamma$.
$d' = c\beta = \varphi\gamma\beta$. Donc $d = \frac{1}{2}\varphi^2\gamma\beta + C^{ste}$. D'après (43c) $d(0) = 1$ donc $d = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2\gamma\beta$.

38. NDT On effectue un changement de coordonnées spatiales via la matrice T^{-1} qui est une succession de rotations autour des axes du premier référentiel, et on effectue les mêmes rotations autour des axes du second référentiel. Le mouvement n'a alors plus lieu selon le même vecteur.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= M(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}^{-1} M(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} M(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

39. NDT

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta \\ (\sinh\varphi)\gamma & 1 + (\cosh\varphi - 1)\gamma\beta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta T^{-1} \\ (\sinh\varphi)\gamma & [1 + (\cosh\varphi - 1)\gamma\beta]T^{-1} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

et

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta T^{-1} \\ (\sinh\varphi)\gamma & [1 + (\cosh\varphi - 1)\gamma\beta]T^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)\beta T^{-1} \\ T(\sinh\varphi)\gamma & T\{[1 + (\cosh\varphi - 1)\gamma\beta]T^{-1}\} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Il est facile de voir qu'il existe toujours une matrice T telle que βT^{-1} soit la transposée de la matrice $T\gamma$. Avec des unités convenables nous obtenons[40]

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & (\sinh\varphi)n^t \\ (\sinh\varphi)n & [1 + (\cosh\varphi - 1)]nn^t \end{pmatrix}, \tag{75}$$

qui est une expression standard pour les transformations de Lorentz avec la rapidité φ, dans la direction du vecteur unité n.

La question peut se poser de savoir pourquoi nous n'avons trouvé que de véritables transformations (Lorentz et Galilée) comme transformations possibles entre référentiels. En effet, il est clair que les transformations purement spaciales, à savoir les rotations en trois dimensions d'espace, existent aussi, et devraient apparaître dans notre dérivation des groupes relativistes. La réponse se trouve dans la suppression, suite à l'équation (47), de la solution $\kappa = 1$.

REMERCIEMENTS

L'un des auteurs (J.-M. L.-L.) souhaite remercier pour son hospitalité le Département de Physique de l'Université de Montréal, où une partie de ce travail a été effectué. Prof. J.-P. Serres nous a gracieusement donner le contre-exemple de la fin de la Sec. I.

40. NDT avec $T[(\gamma\beta)T^{-1}] = (T\gamma)(\beta T^{-1})$