ALGÈBRE LINÉAIRE

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. En résolvant un système de deux équations différentielles très simples, on fait apparaître naturellement les notions de diagonalisation de matrice, de déterminant de matrice, de vecteurs propres et de valeurs propres de matrice.

Table des matières

1. Système d'équations

Soit à résoudre le système d'équations différentielles couplées, homogènes (pas de fonction de x à droite de l'égalité), linéaires (pas d'exposant pour $y(x)$ et ses éventuelles dérivées), d'ordre 1 (dérivée première), à coefficients a_{ij} constants suivant :

$$\begin{cases} y_1'(x) - a_{11}\, y_1(x) - a_{12}\, y_2(x) = 0 \\ y_2'(x) - a_{21}\, y_1(x) - a_{22}\, y_2(x) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2. Forme matricielle

Le système (1) se réécrit :

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}\, y_1(x) + a_{22}\, y_2(x) \end{cases}$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Date: 23 novembre 2015.

soit encore :

$$(y') = [A](y) \tag{2}$$

où (y') et (y) sont des vecteurs dont les coordonnées sont des fonctions de la variable x, et où $[A]$ est la matrice des coefficients a_{ij}.

3. Diagonalisation de la matrice

On effectue le changement de fonctions :

$$\begin{cases} y_1(x) = p_{11}\, z_1(x) + p_{12}\, z_2(x) \\ y_2(x) = p_{21}\, z_1(x) + p_{22}\, z_2(x) \end{cases}$$

où les p_{ij} sont des coefficients constants, et les fonctions y_1 et y_2 sont des combinaisons linéaires des fonctions z_1 et z_2. Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

soit,

$$(y) = [P](z) \tag{3}$$

La matrice de passage $[P]$ est pour l'instant inconnue, elle va servir à découpler les deux équations différentielles. (z) est un vecteur dont les coordonnées sont des fonctions de la variable x.
En dérivant par rapport à x, nous avons :

$$(y') = [P](z')$$

et le système (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} [P](z') &= [A][P](z) \\ (z') &= [P]^{-1}[A][P](z) \end{aligned}$$

Pour découpler les équations, nous allons diagonaliser la matrice $[A]$, c'est à dire choisir la matrice $[P]$ de telle sorte que $[P]^{-1}[A][P]$ soit diagonale et que le système à résoudre s'écrive sous la forme,

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

soit,

$$\begin{cases} z'_1(x) = \lambda_1\, z_1(x) \\ z'_2(x) = \lambda_2\, z_2(x) \end{cases} \tag{4}$$

soit encore :

$$(z') = diag(\lambda_1, \lambda_2)(z)$$

La condition sur $[P]$ est donc la suivante :

$$\begin{aligned} diag(\lambda_1, \lambda_2)(z) &= [P]^{-1}[A][P](z) \\ [P]\, diag(\lambda_1, \lambda_2) &= [A][P] \end{aligned}$$

En développant le membre de gauche de l'égalité, nous avons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ [P]diag(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} p_{11}\,\lambda_1 & p_{12}\,\lambda_2 \\ p_{21}\,\lambda_1 & p_{22}\,\lambda_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

En développant le membre de droite, nous avons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ [A][P] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11}\,p_{11} + a_{12}\,p_{21} & a_{11}\,p_{12} + a_{12}\,p_{22} \\ a_{21}\,p_{11} + a_{22}\,p_{21} & a_{21}\,p_{12} + a_{22}\,p_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

soit donc à résoudre :

$$\begin{bmatrix} a_{11}\,p_{11} + a_{12}\,p_{21} & a_{11}\,p_{12} + a_{12}\,p_{22} \\ a_{21}\,p_{11} + a_{22}\,p_{21} & a_{21}\,p_{12} + a_{22}\,p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}\,\lambda_1 & p_{12}\,\lambda_2 \\ p_{21}\,\lambda_1 & p_{22}\,\lambda_2 \end{bmatrix}$$

équivalent aux 4 équations suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}\,p_{11} + a_{12}\,p_{21} = p_{11}\,\lambda_1 \\ a_{21}\,p_{11} + a_{22}\,p_{21} = p_{21}\,\lambda_1 \\ a_{11}\,p_{12} + a_{12}\,p_{22} = p_{12}\,\lambda_2 \\ a_{21}\,p_{12} + a_{22}\,p_{22} = p_{22}\,\lambda_2 \end{cases}$$

4. Vecteurs propres et valeurs propres

Nous cherchons les valeurs λ_1 et λ_2 solutions de ces équations. Les deux premières équations concernent λ_1, les deux suivantes concernent λ_2. Par conséquent, on peut réécrire le système comme suit :

$$[A]\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$
$$[A]\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

Nous constatons que lorsque la matrice $[A]$ agit sur les vecteurs $\vec{P}_1\binom{p_{11}}{p_{21}}$ et $\vec{P}_2\binom{p_{12}}{p_{22}}$, elle redonne ces mêmes vecteurs à un coefficient multiplicateur près. Ces vecteurs sont appelés les *vecteurs propres* de la matrice $[A]$, et $(\lambda_1,\,\lambda_2)$ est appelé spectre des *valeurs propres* de $[A]$. La matrice de passage s'exprime en fonction des vecteurs propres :

$$[P] = (\vec{p}_1\;\vec{p}_2)$$

Nous avons à résoudre les deux systèmes suivants,

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\,p_{11} + a_{12}\,p_{21} = 0 \\ a_{21}\,p_{11} + (a_{22} - \lambda_1)\,p_{21} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)\, p_{12} + a_{12}\, p_{22} = 0 \\ a_{21}\, p_{12} + (a_{22} - \lambda_2)\, p_{22} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

qui sont similaires.

5. Déterminant d'une matrice

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = 0 & (1.a) \\ c\,x + d\,y = 0 & (1.b) \end{cases} \tag{7}$$

Nous cherchons la condition sur a, b, c, d pour que le système soit soluble. On résout par substitution :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = 0 & (1.a) \to (2.a) \\ a\,x + \dfrac{ad}{c}\,y = 0 & (1.b) \times \dfrac{a}{c} \to (2.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(b - \dfrac{ad}{c}\right) y = 0 & (2.a) - (2.b) \to (3.a) \\ y = -\dfrac{c}{d}\,x & (2.b) \to (3.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (bc - ad)\, y = 0 & (3.a) \to (4.a) \\ \left(a - \dfrac{bc}{d}\right) x = 0 & (3.b) \text{ dans } (1.a) \to (4.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ad - cb)\, y = 0 & -\,(4.a) \\ (ad - cb)\, x = 0 & (4.b) \times d \end{cases}$$

Nous voyons que l'expression $ad - cb$, appelée *déterminant*, doit être nulle pour que le système (7) soit soluble. Pour résoudre ce système d'équations nous n'avons pas eu besoin des variables x et y, mais seulement des coefficients a, b, c, d, autrement dit nous n'avons eu besoin que de la matrice M suivante :

$$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice se note,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - cb \end{aligned}$$

et la condition pour que le système d'équations soit soluble est :

$$\det(M) = 0$$

6. Résolution

Ecrivons que les déterminants des matrices des systèmes d'équations (5) et (6) sont nuls :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \det(A-\lambda_1 \mathbb{1}) = 0 \\ \det(A-\lambda_2 \mathbb{1}) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice unité 2×2. Nous avons :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_1) - a_{21}\,a_{12} = 0 \\ (a_{11}-\lambda_2)(a_{22}-\lambda_2) - a_{21}\,a_{12} = 0 \end{cases}$$

Ces équations étant similaires, on résout l'équation du second degré en λ, qui admet deux solutions, λ_1 et λ_2 :

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}\,a_{12} = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} = 0$$

Le membre de gauche est appelé *polynôme caractéristique*. On note que cela revient à résoudre directement :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le discrimant a pour expression :

$$\Delta = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})$$

Les deux racines ont pour expression :

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})}\right]$$

A l'aide de ces racines, on résoudre le système d'équations (4) pour trouver l'expression du vecteur (z) :

$$\begin{cases} \dfrac{z_1'}{z_1} = \lambda_1 \\[2ex] \dfrac{z_2'}{z_2} = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{z_1'}{z_1}\,dx = \int \lambda_1\,dx \\[2ex] \displaystyle\int \frac{z_2'}{z_2}\,dx = \int \lambda_2\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(z_1) = \lambda_1\, x + c_1 \\ \ln(z_2) = \lambda_2\, x + c_2 \end{cases}$$

On pose $c_1 = \ln C_1$ et $c_2 = \ln C_2$:

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{z_1}{C_1}\right) = \lambda_1\, x \\ \ln\left(\dfrac{z_2}{C_2}\right) = \lambda_2\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1(x) = C_1 e^{\lambda_1\, x} \\ z_2(x) = C_2 e^{\lambda_2\, x} \end{cases} \tag{9}$$

où λ_1 et λ_2 sont connues, et où C_1 et C_2 sont des constantes que l'on détermine en posant $x = 0$:

$$\begin{cases} z_1(0) = C_1 \\ z_2(0) = C_2 \end{cases} \tag{10}$$

On injecte λ_1 dans le système d'équations (5) pour trouver les coordonnées p_{11} et p_{21} du premier vecteur propre $\vec{P_1}$ de la matrice $[A]$.
De même λ_2 et le système d'équations (6) permettent de trouver les coordonnées p_{12} et p_{22} du second vecteur propre $\vec{P_2}$ de $[A]$.
La matrice $[P]$ étant maintenant déterminée, on revient aux variables de départ grâce au changement de fonctions (3), $(y) = [P](z)$.

7. Exemple

Soit à résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} y_1'(x) - 2\, y_1(x) + \ y_2(x) = 0 \\ y_2'(x) + \ y_1(x) - 2\, y_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(y') = [A](y)$$

Cherchons les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. Nous avons alors :

$$\begin{cases} z_1'(x) = z_1(x) \\ z_2'(x) = 3\, z_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1(x) = C_1 e^{x} \\ z_2(x) = C_2 e^{3x} \end{cases}$$

Cherchons les vecteurs propres. Avec la première valeur propre, nous avons :

$$\begin{cases} (2-1)\,p_{11} - \ p_{21} = 0 \\ -\,p_{11} + (2-1)\,p_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{11} - \ p_{21} = 0 \\ -\,p_{11} + \ p_{21} = 0 \end{cases}$$

Nous choisissons les valeurs les plus simples qui soient solution, $p_{11} = 1$ et $p_{21} = 1$. Avec la seconde valeur propre :

$$\begin{cases} (2-3)\,p_{11} - \ p_{21} = 0 \\ -\,p_{11} + (2-3)\,p_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\,p_{11} - \ p_{21} = 0 \\ -\,p_{11} - \ p_{21} = 0 \end{cases}$$

Nous choisissons les valeurs les plus simples qui soient solution, $p_{11} = 1$, $p_{21} = -1$. Les vecteurs propres sont :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{P}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La matrice de passage s'écrit :

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les solutions s'écrivent :

$$(y) = [P](z)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} \\ y_2(x) = C_1 e^{x} - C_2 e^{3x} \end{cases}$$

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`