LES CONIQUES

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Ellipses, paraboles et hyperboles sont des coniques. Ce sont des courbes planes résultant de l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.

TABLE DES MATIÈRES

1. DÉFINITION DES TROIS CONIQUES

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une ellipse. Nous allons partir d'une définition et montrer l'équivalence des autres.

1.1. Définition bifocale d'une ellipse.

Définition 1.1. Soient F et F' deux points du plan. L'ellipse de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

MF et MF' sont appelés rayons focaux du point M.

Date: 8 avril 2016.

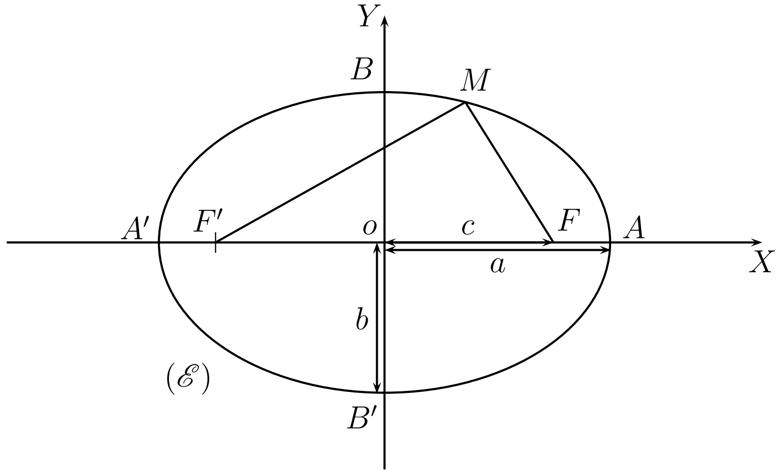

Figure 1. Une ellipse

Soient a la longueur du demi-grand axe de l'ellipse, et b celle du demi-petit axe. On pose les coordonnées des foyers, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$FF' = 2c$$

A,A',B,B' sont appelés les sommets de l'ellipse. Supposons M au sommet A, nous avons :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= (a - c) + (a + c) \\ &= 2a \end{aligned} \tag{1}$$

ce qui fixe la constante égale à la longueur $2a$ du grand axe AA' (aussi appelé axe focal, car il passe par les foyers).
Si $c > a$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ est vide.
Si $c = a$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ se réduit au segment $[FF']$.
Si $c = 0$, l'ensemble $(\mathscr{E})$ est un cercle, les foyers sont confondus et $MF = a$ est le rayon.
Nous supposerons

$$a > c > 0 \tag{2}$$

Supposons M au sommet B, alors $MF = MF'$, et avec (1) nous avons $MF = MF' = a$. De plus, MF étant l'hypothénus du triangle MFo rectangle en o, d'après le théorème de Pythagore :

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3}$$

Théorème 1.1. *L'équation cartésienne d'une ellipse centrée en $o(0, 0)$, de demi-petit axe b et de demi-grand axe a situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

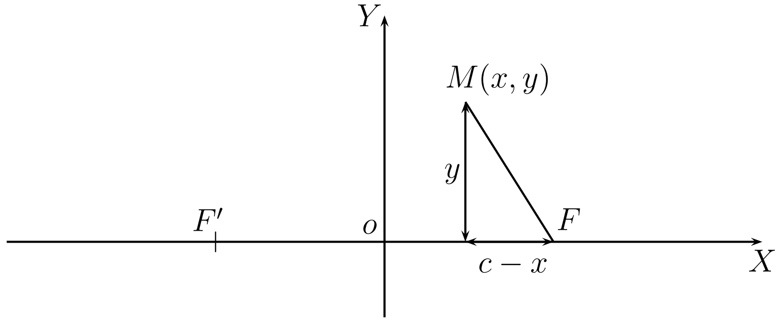

FIGURE 2.

Démonstration. Soient $M(x,y)$ un point de l'ellipse $(\mathscr{E})$:

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de la figure 2 :

$$\begin{cases} MF^2 = (x-c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x+c)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} MF^2 - MF'^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2 \\ (MF + MF')(MF - MF') &= -4xc \\ MF - MF' &= -\frac{2xc}{a} \end{aligned}$$

Avec la relation (1) nous avons,

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -\dfrac{2xc}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

Chacune de ces relations donne

$$\begin{aligned} x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 &= a^4 + x^2c^2 \\ x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right) \end{aligned}$$

Avec la relation (3),

$$\begin{aligned} x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Remarque. Si $c = 0$ alors $a = b$ et nous obtenons l'équation d'un cercle de rayon a :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Si $a = c$ alors $b = 0$ et l'équation (4) ne redonne pas le segment $[FF']$.

□

Nous avons montré que la relation (1) que nous avons posé comme définition de l'ellipse, implique l'équation (4). Réciproquement, montrons que l'équation (4) implique la relation (1).

Théorème 1.2. *L'ensemble des points $M(x, y)$, d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

forme une ellipse.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 &= a^2\left(a^2 - c^2\right) \\ x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{x^2c^2}{a^2} \end{aligned}$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF = \left|a - \dfrac{xc}{a}\right| \\ MF' = \left|a + \dfrac{xc}{a}\right| \end{cases}$$

A partir de l'équation (4),

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$$
$$\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1$$

avec (2)

$$\left|\frac{xc}{a}\right| \leqslant c$$
$$\left|\frac{xc}{a}\right| < a$$

Donc,

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} \end{cases}$$

soit,

$$MF + MF' = 2a$$

□

Il en résulte que l'équation (4) est équivalente à la définition (1), et peut à son tour servir de définition pour l'ellipse.

1.2. **Définition monofocale d'une ellipse.**

Théorème 1.3. *L'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'une ellipse de foyer $F(c,0)$ suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e \tag{6}$$

où $e = c/a$ est l'excentricité de l'ellipse, telle que $1 > e > 0$, et où H est la projection orthogonale de M sur la droite $(D) : x = a^2/c$

Démonstration. Soit $M(x_M, y_M)$ un point de l'ellipse de foyer $F(c,0)$. D'après la relation (5),

$$MF = a - \frac{x_M c}{a}$$
$$MF = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x_M\right)$$

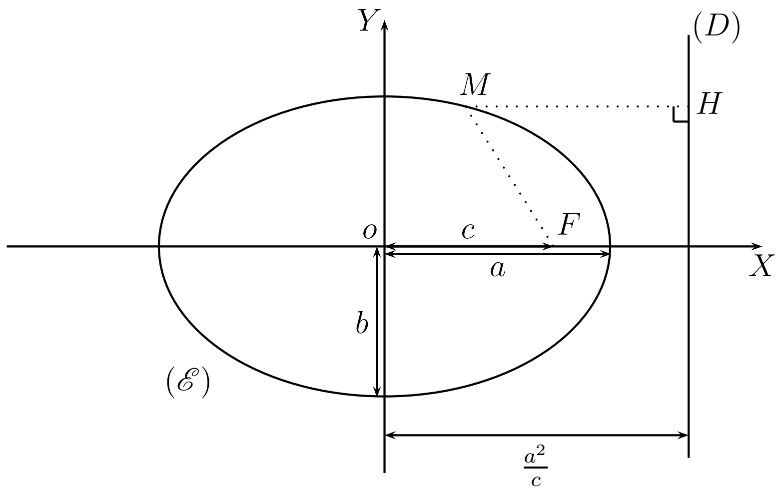

FIGURE 3. Une ellipse et l'une de ses deux directrices

Soit (D) la droite verticale d'équation $x = a^2/c$, appelée directrice de l'ellipse associée au foyer F. Le terme $a^2/c - x_M$ est la distance orthogonale du point M à cette droite. Désignons par H la projection orthogonale de M sur la droite (D),

$$MF = \frac{c}{a}\,MH$$
$$\frac{MF}{MH} = e$$

D' après (2), $a > c > 0$, donc $1 > e > 0$.

Remarque. Si $c = 0$, alors $e = 0$ et l'équation (6) ne permet pas de retrouver un cercle. Si $a = c$, alors $e = 1$ et nous verrons que (6) donne l'équation d'une parabole (et non du segment $[FF']$).

□

Nous avons montré que la relation (1) implique la relation (6). Réciproquement, montrons que la relation (6) implique la relation (1).

Théorème 1.4. *Soit $F(c, 0)$ un point du plan, et soit $(D) : x = a^2/c$ une droite du plan. L'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M du plan tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où $e = c/a$ est telle que $1 > e > 0$, et où H est la projection orthogonale de M sur la droite $(D) : x = a^2/c$, forme une ellipse.

Démonstration.

$$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$$
$$MF^2 = \frac{c^2}{a^2} MH^2$$
$$(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$
$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2}$$
$$x^2a^2 + c^2a^2 + y^2a^2 = a^4 + x^2c^2$$
$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + y^2a^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$1 > e$ donc $a > c$, on pose $b^2 = a^2 - c^2$,

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Il en résulte que pour $1 > e > 0$, la relation (6) est équivalente à la relation (1) et peut servir de définition de l'ellipse.

1.3. **Définition bifocale d'une hyperbole.**

Définition 1.2. Soient F et F' deux points du plan. L'hyperbole de foyers F et F' est l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = C^{ste}$$

où $C^{ste} > 0$.

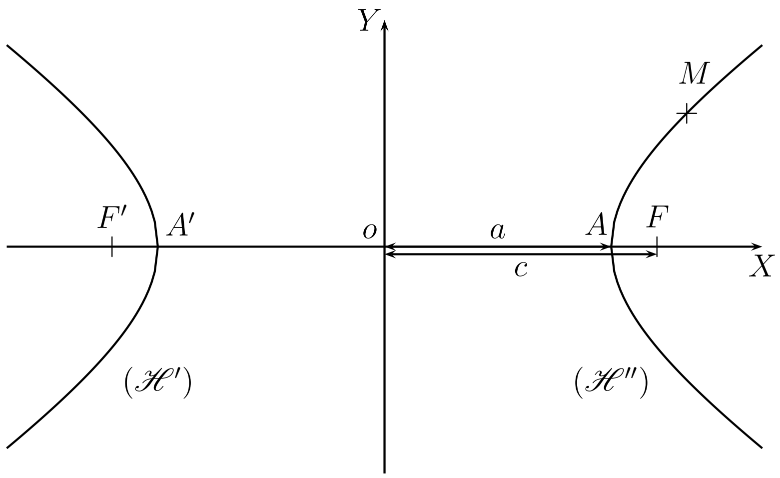

FIGURE 4. Une hyperbole

MF et MF' sont appelés rayons focaux du point M. On pose les coordonnées des foyers, $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, si bien que la distance focale s'écrit :

$$FF' = 2c$$

A et A' sont les sommets de l'hyperbole. Supposons M au sommet A, nous avons,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AF' - AF \\ &= AA' + A'F' - AF \end{aligned}$$

Par symétrie, $A'F' = AF$,

$$\begin{aligned} MF' - MF &= AA' \\ &= 2a \end{aligned}$$

ce qui fixe la constante égale à la distance $2a$ entre les sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$.

$$\begin{aligned} |MF - MF'| &= 2a \qquad (7) \\ MF - MF' &= \pm 2a \end{aligned}$$

Le signe $+$ correspond à la branche $(\mathscr{H}')$ de l'hyperbole, pour laquelle $x \in]-\infty, -a]$, et le signe $-$ à la branche $(\mathscr{H}'')$ pour laquelle $x \in [a, +\infty[$.
Si $a > c$, $|MF' - MF| > FF'$ ce qui est impossible, $(\mathscr{H}) = \varnothing$.
Si $a = c$, $|MF' - MF| = FF'$, l'ensemble $(\mathscr{H})$ est la droite (FF') privée du segment ouvert $]FF'[$.
Si $a = 0$, $MF' = MF$, l'ensemble $(\mathscr{H})$ est la droite des ordonnées. Nous supposerons

$$c > a > 0 \qquad (8)$$

Théorème 1.5. *L'équation cartésienne d'une hyperbole centrée en $o(0, 0)$, d'axe focal sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

Démonstration.

$$|MF - MF'| = 2a$$

$$\begin{cases} MF - MF' = 2a \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

La figure 2 est valable ici encore. Les relations

$$\begin{cases} MF^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{cases}$$

donnent

$$MF^2 - MF'^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2$$

$(MF + MF')(MF - MF') = -4xc$

D'une part, nous avons

$$\begin{cases} (MF + MF')(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF + MF' = -\dfrac{2xc}{a} \\ MF - MF' = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} \\ MF' = -a - \dfrac{xc}{a} \end{cases} \tag{10}$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{cases} (MF + MF')(MF - MF') = -4xc \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF + MF' = \dfrac{2xc}{a} \\ MF - MF' = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF = -a + \dfrac{xc}{a} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} \end{cases} \tag{11}$$

Les équations (10) et (11) donnent,

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

Chacune de ces relations donne la relation

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Comme $c > a$, on pose,

$$-b^2 = a^2 - c^2 \tag{12}$$

qui est l'homologue pour l'hyperbole de la relation (3) pour l'ellipse.

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Nous avons montré que la relation (7) implique l'équation (9). Réciproquement, montrons que l'équation (9) implique la relation (7).

Théorème 1.6. *L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *tels que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

forme une hyperbole.

Démonstration.

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$
$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

En soustrayant et en additionnant $2xc$,

$$\begin{cases} x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2xc + \dfrac{x^2c^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF^2 = \left(a - \dfrac{xc}{a}\right)^2 \\ MF'^2 = \left(a + \dfrac{xc}{a}\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MF = \left|a - \dfrac{xc}{a}\right| \\ MF' = \left|a + \dfrac{xc}{a}\right| \end{cases}$$

A partir de l'équation (9),

$$\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$$
$$\left|\frac{x}{a}\right| \geqslant 1$$

Avec (8),

$$\left|\frac{xc}{a}\right| \geqslant c$$
$$\left|\frac{xc}{a}\right| > a$$

Donc pour $x \in]-\infty, a]$,

$$\begin{cases} MF = a - \dfrac{xc}{a} \\ MF' = -a - \dfrac{xc}{a} \end{cases}$$

soit,

$$MF - MF' = 2a$$

qui est l'équation de la première branche $\mathscr{H}'$ de l'hyperbole.
Pour $x \in [a, +\infty[$,

$$\begin{cases} MF = -a + \dfrac{xc}{a} \\ MF' = a + \dfrac{xc}{a} \end{cases}$$

soit,

$$MF - MF' = -2a$$

qui est l'équation de la seconde branche $\mathscr{H}''$ de l'hyperbole. La réunion des deux branches donne la relation cherchée :

$$|MF - MF'| = 2a$$

□

Il en résulte que l'équation (9) est équivalente à la relation (7) et peut servir de définition de l'hyperbole.

1.4. Définition monofocale d'une hyperbole.

Théorème 1.7. *Soit* $(D) : x = a^2/c$ *une droite du plan et soit* $F(c, 0)$ *un point du plan. Soit* $e = c/a > 1$*, et* H *la projection orthogonale de* M *sur* (D)*. L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une branche d'hyperbole, de foyer F*, de directrice* (D)*, et d'excentricité* e*.*

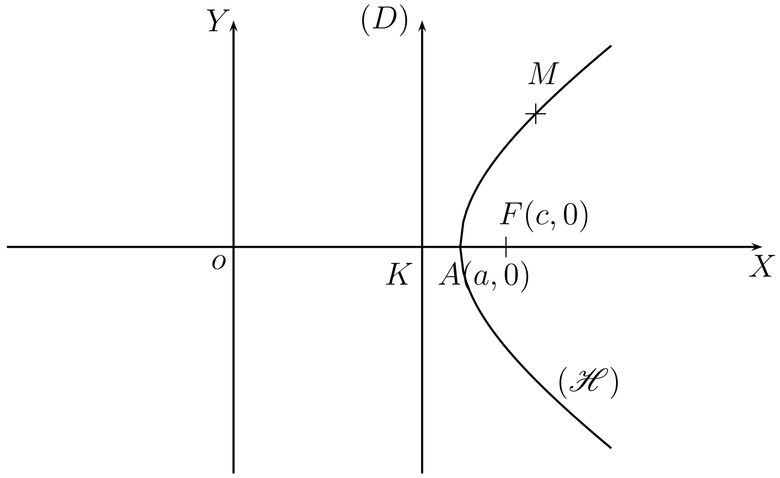

Figure 5. Une branche d'hyperbole

Démonstration.

$$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$$
$$MF^2 = \frac{c^2}{a^2} MH^2$$
$$(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$
$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2c^2}{a^2}$$
$$x^2 + c^2a^2 + y^2a^2 = a^4 + x^2c^2$$
$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + y^2a^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$e > 1$ donc $a < c$, avec la relation (12) on a,

$$-x^2b^2 + y^2a^2 = -a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

Remarque. Avec la droite $(D') : x = -a^2/c$ et le foyer $F'(-c, 0)$ nous obtenons la seconde branche d'hyperbole d'équation

$$\frac{MF'}{MH'} = e$$

Nous avons montré que pour $e > 1$, la relation (6) implique l'équation (9). Réciproquement, montrons que pour $e > 1$, l'équation (9) implique la relation (6).

Théorème 1.8. *L'ensemble* $(\mathscr{H})$ *des points* M *d'une branche d'hyperbole de foyer* $F(c,0)$ *et de sommet* $A(a,0)$ *suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = c/a > 1$.

Démonstration. A partir des relations (10) et (11),

$$\begin{aligned} MF &= \left|-a + \frac{xc}{a}\right| \\ MF &= \frac{c}{a}\left|x - \frac{a^2}{c}\right| \\ \frac{MF}{MH} &= \frac{c}{a} \\ \frac{MF}{MH} &= e \end{aligned}$$

et comme $c > a$, $e > 1$. □

Remarque. A partir de la relation

$$MF' = \left|a + \frac{xc}{a}\right|$$

on obtient l'équation de la seconde branche d'hyperbole,

$$\frac{MF'}{MH'} = e$$

Il en résulte que pour $e > 1$, la relation (6) est équivalente à l'équation (9) et peut servir de définition de l'hyperbole.

1.5. **Définition d'une parabole.**

Définition 1.3. L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points $M(x,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient l'équation

$$y = ax^2$$

avec $a \neq 0$, est une parabole de sommet o et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

Cherchons l'équation de la parabole d'axe de symétrie l'axe des abscisses. Considérons le repère $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ avec $\mathbf{I} = \mathbf{j}$, et $\mathbf{J} = -\mathbf{i}$, dans lequel on a $M(X,Y)$ avec,

$$\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$$

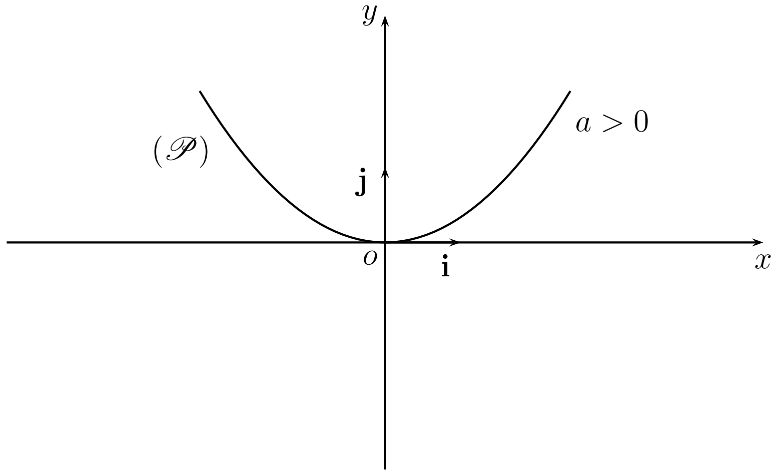

Figure 6. Une parabole

L'équation de $(\mathscr{P})$ dans $(o, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ s'écrit,

$$X = a(-Y)^2 \tag{14}$$

$$Y^2 = \frac{X}{a} \tag{15}$$

$$Y = \pm\sqrt{\frac{X}{a}} \tag{16}$$

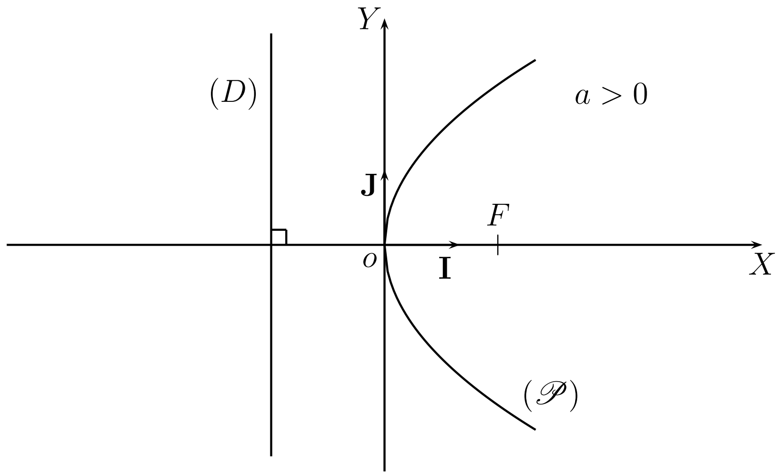

Figure 7. Une parabole

Théorème 1.9. *Soit (D) une droite du plan et soit F un point du plan n'appartenant pas à (D). Soit $e = 1$, et H la projection orthogonale de M sur (D). L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points M tels que*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

forme une parabole de foyer F, de directrice (D), et de sommet équidistant de F et de (D).

Démonstration.

$$MF = MH$$
$$MF^2 = MH^2$$

Supposons le foyer de coordonnées $F(c, 0)$, et soit (D) la droite verticale d'équation $x = -c$, alors,

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$
$$y^2 = 4cx$$

Dans le cas particulier de la parabole, on appelle $p = 2c$ le paramètre et l'on a,

$$y^2 = 2px$$

□

Nous avons montré que pour $e = 1$ la relation (6) implique l'équation (15). Réciproquement, montrons que pour $e = 1$ l'équation (15) implique la relation (6).

Théorème 1.10. *L'ensemble $(\mathscr{P})$ des points M d'une parabole suit la relation*

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e = 1$.

Démonstration.

$$y^2 = 2px$$
$$\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2$$
$$MF^2 = MH^2$$
$$MF = MH$$

□

2. Equation commune aux trois coniques

A partir des chapitres précédents, nous pouvons poser une définition commune aux trois coniques.

Définition 2.1. Soient F un point du plan, (D) une droite du plan ne passant pas par F, H la projection orthogonale de M sur (D) et e un réel positif. $(\mathscr{C})$ est l'ensemble des points M du plan tel que

$$\frac{MF}{MH} = e$$

avec $e < 1$ pour une ellipse, $e = 1$ pour une parabole, et $e > 1$ pour une hyperbole.

Rapportons le plan à un repère orthonormé $(S, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, S étant le sommet de la conique. Etant donnés le foyer $F(d, 0)$ et la droite directrice (D), cherchons l'équation de la conique.

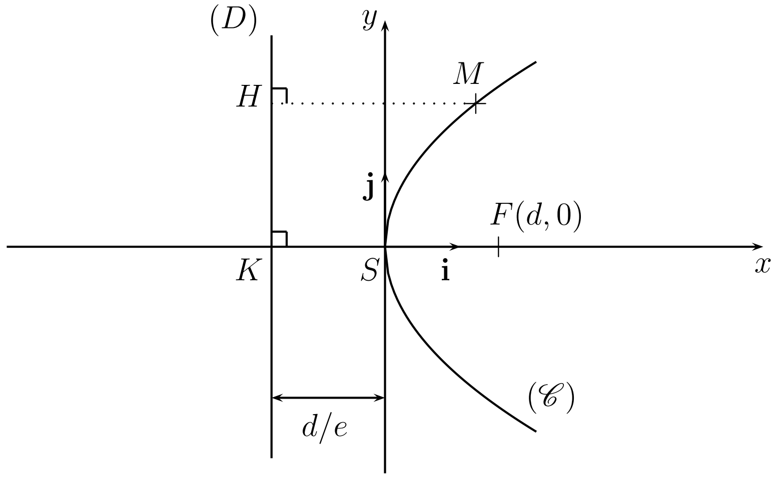

Figure 8. Une conique

Soit K la projection orthogonale de F sur (D). Lorsque M passe au sommet S, H est en K, et nous avons

$$\frac{SF}{SK} = e$$
$$SK = \frac{d}{e}$$

par conséquent, le sommet S étant toujours entre le foyer F et la droite (D), nous avons $K(-\frac{d}{e}, 0)$ donc $H(-\frac{d}{e}, y)$, et,

$$MF^2 = e^2 MH^2$$
$$(x-d)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{d}{e}\right)^2$$
$$x^2 - 2xd + d^2 + y^2 = e^2x^2 + 2xde + d^2$$
$$y^2 = (e^2-1)x^2 + 2xd(e+1)$$

Pour retrouver l'équation de la parabole pour $e = 1$, on pose $p = d(e+1)$ le paramètre, et l'on a

$$y^2 = 2px + (e^2-1)x^2 \tag{17}$$

qui est l'équation commune aux trois coniques, exprimée dans un repère ayant pour centre le sommet de la conique.

Quelle est l'expression du paramètre p en fonction de a et de b ?

Cherchons l'équation de l'ellipse dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A'(-a, 0)$. A partir de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x + a \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} a^2Y^2 + b^2\left(X - a\right)^2 &= a^2b^2 \\ a^2Y^2 + b^2X^2 - 2Xab^2 + a^2b^2 &= a^2b^2 \\ Y^2 &= 2\,\frac{b^2}{a}X - \frac{b^2}{a^2}X^2 \\ &= 2\,\frac{b^2}{a}X + \left(e^2 - 1\right)X^2 \end{aligned}$$

par conséquent, pour une ellipse

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Pour un cercle, $a = b$ et $e = 0$, si bien que

$$p = a$$

L'équation (17) donne

$$\begin{aligned} y^2 &= 2ax - x^2 \\ y^2 + (x - a)^2 &= a^2 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre $o(0,0)$, exprimée dans le repère $(A', \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

De même, cherchons l'équation de l'hyperbole dans le repère $(A, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de centre $A(a, 0)$. A partir de l'équation de l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

effectuons le changement de variables :

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x - a \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} b^2\left(X + a\right)^2 - a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ b^2X^2 + 2Xab^2 + a^2b^2 - a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ Y^2 &= 2\,\frac{b^2}{a}X + \frac{b^2}{a^2}X^2 \end{aligned}$$

En utilisant la relation (12), pour une hyperbole,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{1+\tfrac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

donc,

$$Y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}X + \left(e^2-1\right)X^2$$

par conséquent, pour une hyperbole nous avons encore

$$p = \frac{b^2}{a}$$

3. Représentations paramétriques

3.1. Ellipse. Tout point $M(x,y)$ de l'ellipse $(\mathscr{E})$ vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

Or, $\forall\varphi\in\mathbb{R}$,

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\, a\cos\varphi \\ y = \pm\, b\sin\varphi \end{cases}$$

Dans un intervalle de 2π nous avons

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \tag{19}$$

Ces relations impliquent qu'à tout point $M(x,y)$ de l'ellipse $(\mathscr{E})$, on puisse associer un réel φ (et un seul dans un intervalle 2π) vérifiant (19). L'angle φ est appelé anomalie excentrique. Réciproquement, montrons que tout point $M(x,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (19) est un point de l'ellipse $(\mathscr{E})$

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\varphi \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les égalités (19) constituent une représentation paramétrique de l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation (18).
Posons $\tan\frac{\varphi}{2} = t$, les égalités (19) donnent

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\,\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \tag{20}$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'ellipse $(\mathscr{E})$. Toutefois,

$$\tan\tfrac{\varphi}{2} = t \Rightarrow \varphi \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

donc le sommet $A'(-a, 0)$ n'est pas obtenu par (20) quand $t \in \mathbb{R}$. Cependant, quand $t \to \infty$, le point M tend vers A'.

3.1.1. *Interprétation géométrique.*

Définition 3.1. Soit l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où l'on suppose $a > b$. On appelle cercle principal de l'ellipse, le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre o et de rayon a, d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2$$

On appelle cercle secondaire de l'ellipse, le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre o et de rayon b, d'équation

$$x^2 + y^2 = b^2$$

Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathscr{E})$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x^2 = a^2\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right) \\ y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \end{cases}$$

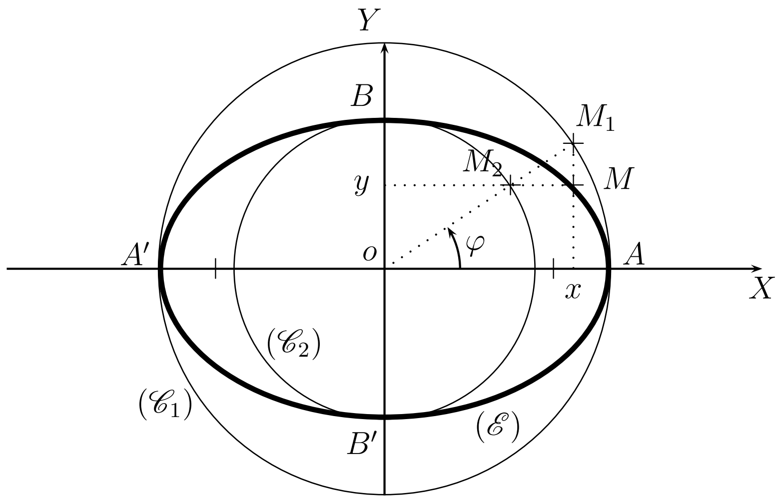

FIGURE 9. Anomalie excentrique

Soit $M_1(x, y_1)$ un point de $(\mathscr{C}_1)$ de même abscisse que M,

$$\begin{aligned}
x^2 + y_1^2 &= a^2 \\
y_1^2 &= a^2 - x^2 \\
&= a^2 - a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \\
&= \frac{a^2}{b^2}\, y^2
\end{aligned}$$

et soit $M_2(x_2, y)$ un point de $(\mathscr{C}_2)$ de même ordonnée que M,

$$\begin{aligned}
x_2^2 + y^2 &= b^2 \\
x_2^2 &= b^2 - y^2 \\
&= b^2 - b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{b^2}{a^2}\, x^2
\end{aligned}$$

Donc, nous avons $M(x, y)$, $M_1(x, \frac{a}{b}y)$ et $M_2(\frac{b}{a}x, y)$.
Effectuons le produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
\mathbf{oM_1} \times \mathbf{oM_2} &= \left(xy - \frac{a}{b}\, y \frac{b}{a} x\right)\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que les points o, M_1 et M_2 sont alignés. Si l'on pose $(\mathbf{ox}, \mathbf{oM_1}) = \varphi$, alors, les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ étant de rayons respectifs

a et b,

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_2 = b\sin\varphi \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

ce qui donne une interprétation géométrique de l'anomalie excentrique.

3.2. **Hyperbole.** Tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{21}$$

Or, $\forall \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$
$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - \tan^2\varphi = 1$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \tan^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = \pm\, b\tan\varphi \end{cases}$$

Dans un intervalle de 2π, les multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$ étant exclus, nous avons

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \tag{22}$$

Ces relations impliquent qu'à tout point $M(x, y)$ de l'hyperbole $(\mathscr{H})$, on puisse associer un réel φ (et un seul dans un intervalle 2π diminué des multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$) vérifiant (22). L'angle φ est appelé anomalie excentrique. Réciproquement, montrons que tout point $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient (22) est un point de l'hyperbole $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y = b\tan\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \tan^2\varphi \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les égalités (22) constituent une représentation paramétrique de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation (21).
Posons $\tan\frac{\varphi}{2} = t$, les égalités (22) donnent

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\,\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases} \tag{23}$$

qui est une autre représentation paramétrique de l'hyperbole $(\mathscr{H})$. Les restrictions suivantes sont équivalentes,

$$\varphi \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ t \notin \{-1,+1\}$$

Toutefois,

$$\tan\tfrac{\varphi}{2} = t \Rightarrow \varphi \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

donc le sommet $A'(-a,0)$ n'est pas obtenu par (23) quand $t \in \mathbb{R} - \{-1,+1\}$. Cependant, quand $t \to \infty$, le point M tend vers A'.

4. Coordonnées polaires

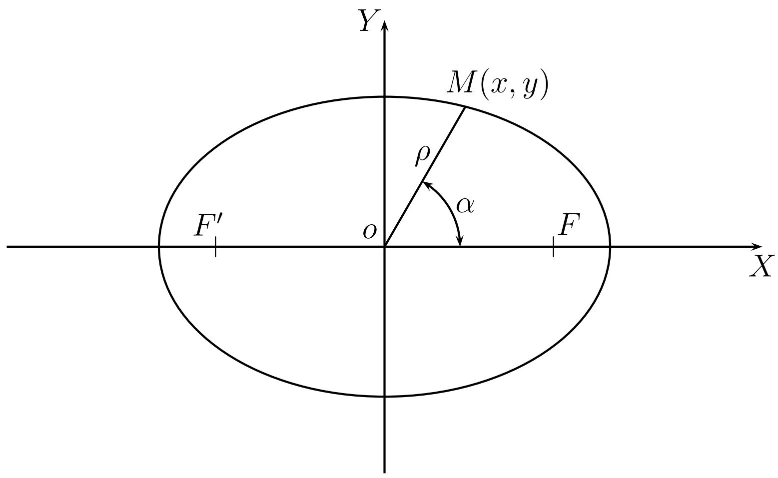

Figure 10. Coordonnées polaires centrées sur o

4.1. Centrées sur o.

Théorème 4.1. *En coordonnées polaires (ρ,α) de centre o, l'équation d'une ellipse centrée en $o(0,0)$, de demi-petit axe b, d'excentricité e, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit :*

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\alpha}} \tag{24}$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} b^2\rho^2 \cos^2 \alpha + a^2\rho^2 \sin^2 \alpha &= a^2b^2 \\ \rho^2 &= \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{b^2}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cos^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \tfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{1 - \tfrac{b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

si bien que,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} \\ \rho &= \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

car $b > 0$. □

Nous avons montré que l'équation (4) implique l'équation (24). Réciproquement, montrons que l'équation (24) implique l'équation (4).

Théorème 4.2. *En coordonnées polaires* (ρ, α) *de centre* o*, l'équation*

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}}$$

est celle d'une ellipse centrée en $o(0, 0)$*, de demi-petit axe* b*, d'excentricité* e*, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.*

Démonstration.

$$\rho = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\alpha}}$$
$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\alpha}$$
$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2\alpha}$$
$$\rho^2 = \frac{b^2}{\sin^2\alpha + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\alpha}$$
$$a^2\rho^2\sin^2\alpha + b^2\rho^2\cos^2\alpha = a^2b^2$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases}$$

On a alors

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

□

4.2. **Centrées sur le foyer F.**
L'angle θ s'appelle l'anomalie vraie.

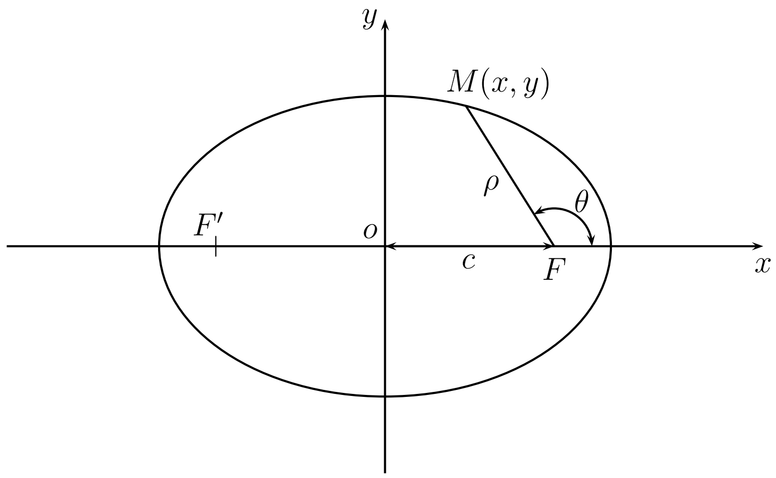

FIGURE 11. Coordonnées polaires centrées sur F

Théorème 4.3. *En coordonnées polaires (ρ, θ) de centre F, l'équation d'une ellipse centrée en $o(-c, 0)$, de demi-petit axe b, d'excentricité e,* *et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses, s'écrit*[1] *:*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{25}$$

Démonstration. Cherchons l'équation cartésienne de l'ellipse dans le repère $(F, \mathbf{i}, \mathbf{j})$. A partir de l'équation (4) dans le repère $(o, \mathbf{i}, \mathbf{j})$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} X = x - c \\ Y = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ b^2\left(X + c\right)^2 + a^2Y^2 &= a^2b^2 \\ b^2X^2 + 2b^2Xc + b^2c^2 + a^2Y^2 &= a^2b^2 \end{aligned}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} X = \rho\cos\theta \\ Y = \rho\sin\theta \\ \rho^2 = X^2 + Y^2 \\ Y^2 = \rho^2 - \rho^2\cos^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2X^2 + 2b^2Xc + a^2Y^2 &= b^2\left(a^2 - c^2\right) \\ b^2\rho^2\cos^2\theta + 2b^2c\rho\cos\theta + a^2\rho^2 - a^2\rho^2\cos^2\theta &= b^4 \end{aligned}$$

On effectue le changement de paramètres,

$$\begin{cases} e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \\ c = ae \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho^2\cos^2\theta\left(b^2 - a^2\right) + 2b^2ae\rho\cos\theta + a^2\rho^2 &= b^4 \\ \rho^2\cos^2\theta\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + 2\,\frac{b^2}{a}e\rho\cos\theta + \rho^2 &= \frac{b^4}{a^2} \end{aligned}$$

on pose $p = b^2/a$ appelé paramètre de l'ellipse,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= p^2 + e^2\rho^2\cos^2\theta - 2pe\rho\cos\theta \\ &= \left(p^2 - e\rho\cos\theta\right)^2 \\ \rho &= \pm\left(p^2 - e\rho\cos\theta\right) \end{aligned}$$

1. Voir Le probleme de Kepler.pdf

Le rayon étant positif,

$$\begin{aligned} \rho &= p^2 - e\rho\cos\theta \\ \rho\,(1 + e\cos\theta) &= p \\ \rho &= \frac{p}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

□

Nous avons montré que l'équation (4) implique l'équation (25). Réciproquement, montrons que l'équation (25) implique l'équation (4).

Théorème 4.4. *En coordonnées polaires* (ρ, θ) *de centre* F*, l'équation*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

est celle d'une ellipse centrée en $o(-c, 0)$*, de demi-petit axe* b*, d'excentricité* e*, et dont l'axe focal est situé sur l'axe des abscisses.*

Démonstration.

$$\rho + e\rho\cos\theta = p$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \rho = \left[y^2 + (x-c)^2\right]^{1/2} \\ \rho\cos\theta = x - c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[y^2 + (x-c)^2\right]^{1/2} + e(x-c) &= p \\ y^2 + (x-c)^2 &= [p - e(x-c)]^2 \\ y^2 + (x-c)^2 - \left[p^2 - 2pe(x-c) + e^2(x-c)^2\right] &= 0 \\ y^2 + (1-e^2)(x-c)^2 - p^2 + 2pe(x-c) &= 0 \end{aligned}$$

Soit e l'excentricité et p le paramètre, tels que

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} & (26) \\ p = b^2/a & (27) \end{cases}$$

Avec ces définitions, nous avons :

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2xc + c^2) - \frac{b^4}{a^2} + 2\frac{b^2}{a}e(x-c) &= 0 \\ a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2xc + b^2c^2 - b^4 + 2b^2aex - 2b^2aec &= 0 \end{aligned}$$

En remarquant que $ae = c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\begin{aligned} a^2y^2 + b^2x^2 - b^4 - b^2c^2 &= 0 \\ a^2y^2 + b^2x^2 &= b^4 + b^2(a^2 - b^2) \\ a^2y^2 + b^2x^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

□

Remarque. Lorsque l'excentricité est nulle nous obtenons un cercle. Il y a deux façon de le voir : l'équation (25) devient $\rho = p$ qui est l'équation d'un cercle de rayon p. En partant de l'expression de l'excentricité :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} &= 0\\ \frac{b^2}{a^2} &= 1\\ a &= b\end{aligned}$$

le demi-grand axe et le demi-petit axe sont égaux, nous avons bien un cercle.
Lorsque l'excentricité tend vers l'unité, le rapport b/a tend vers zéro et l'ellipse n'est plus fermée. La définition $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ que nous avons prise pour l'excentricité ne s'applique que pour un cercle ou une ellipse.

Remarque. L'excentricité e et le paramètre p sont indépendants : fixer la valeur de l'un ne fixe pas la valeur de l'autre. Il en va de même en coordonnées cartésiennes pour les longueurs a et b des demi-axes. Par conséquent, les deux relations (26) et (27) sont nécessaires pour que les ellipses d'équations $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ et $p = \rho + \rho e \cos\theta$ soient identiques.

5. Surface totale d'une ellipse

Théorème 5.1. *La surface d'une ellipse est donnée par,*

$$S = \pi\, ab$$

Démonstration. On part de l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2}\\ y(x) &= \pm\, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\end{aligned}$$

On intègre la fonction $y(x)$ sur le quart supérieur droit de l'ellipse pour obtenir le quart de la surface totale S. La variable x varie alors de 0 à a, et $y(x)$ reste positive :

$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_0^a y(x)\, dx\\ &= \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx\end{aligned}$$

On pose $t = x/a$, d'où $dx = adt$,

$$S = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

On pose $t = \sin\theta$, d'où $dt = \cos\theta\, d\theta$,

$$\begin{aligned}
S &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta \\
&= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 2ab \left(\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\, d\theta \right)
\end{aligned}$$

On pose $\alpha = 2\theta$, d'où $d\theta = \frac{1}{2} d\alpha$,

$$\begin{aligned}
S &= 2ab \left([\theta]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos\alpha\, d\alpha \right) \\
&= 2ab \left(\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} [\sin\alpha]_0^{\pi} \right) \\
&= \pi\, ab
\end{aligned}$$

□

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`