DIFFÉRENTIELLE TOTALE EXACTE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Définition et conditions d'obtention d'une différentielle totale exacte.

Table des matières

1. Différentielle d'une fonction d'une variable

Soit f une fonction de la variable x, dérivable en un point x_0 de son domain de définition. Pour une variation Δx petite mais finie de la variable x à partir de x_0, la fonction f subit la variation

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Définition 1.1. *Dérivée*
La dérivée au point $(f(x_0), x_0)$ de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Remarque. $f'(x_0)$ est un nombre, c'est le rapport de la hauteur $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sur la largeur Δx. C'est donc la tangente de l'angle que fait la tangente à la fonction f au point $(f(x_0), x_0)$ avec l'horizontale.

Pour une variation Δx petite mais finie (ce Δx n'est pas le même que celui qui tend vers zéro dans la dérivée)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= f'(x_0) + \epsilon(\Delta x) \\ \Delta f &= f'(x_0)\Delta x + \Delta x\, \epsilon(\Delta x) \end{aligned}$$

Date: 2 septembre 2017.

où ϵ est une fonction de Δx qui tend vers zéro quand Δx tend vers zéro. $f'(x_0)$ étant un nombre, le premier terme est linéaire en Δx.

Lorsque Δx tend vers zéro (voir schéma 1)

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f &= f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} [\Delta x\, \epsilon(\Delta x)] \\ f(x_0 + dx) - f(x_0) &= f'(x_0)\, dx + dx\, \epsilon(dx)\end{aligned}$$

Le second terme tend vers zéro plus rapidement que le premier car la fonction $\epsilon(\Delta x)$ tend aussi vers zéro avec Δx. Le premier terme est alors le terme principal.

Définition 1.2. *Différentielle*
La différentielle au point $(f(x_0), x_0)$ de la fonction f est définie par :

$$df(x_0) \triangleq f'(x_0)dx$$

où la notation « d » de Leibniz signifie différentielle ou petite différence.

Si bien que l'on a

$$f(x + dx) - f(x) = df(x_0) + dx\, \epsilon(dx)$$

$df(x_0)$ est la partie linéaire en dx de l'accroissement de la fonction f entre les points x_0 et $x_0 + dx$, c'est à dire l'approximation linéaire d'ordre un de la fonction f au point x_0

$$\begin{aligned}f(x + dx) - f(x) &\approx df(x) \\ f(x + dx) &\approx f(x) + df(x)\end{aligned}$$

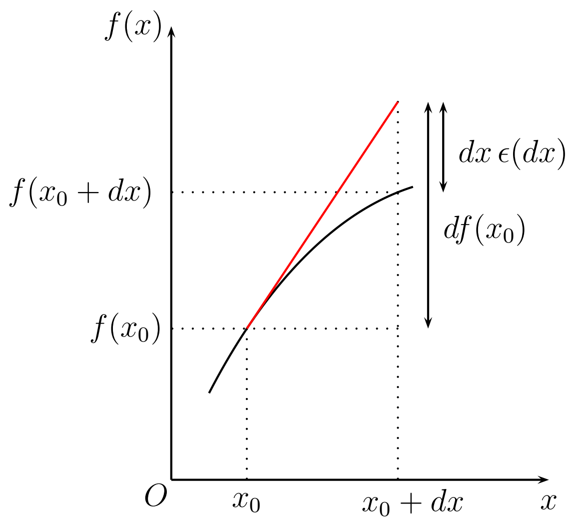

FIGURE 1. Différentielle $df(x_0)$ de la fonction f au point x_0

En physique, l'expression « différentielle totale exacte » n'est autre que la différentielle que l'on rencontre en mathématiques.

2. Différentielle d'une fonction de deux variables

Soit $f(x,y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y, alors :

$$\begin{aligned}
df(x,y) &= \lim_{dx,dy\to 0} f(x+dx,y+dy) - f(x,y) \\
&= \lim_{dx,dy\to 0} [f(x+dx,y+dy) - f(x,y+dy) + f(x,y+dy)] - f(x,y) \\
&= \lim_{dx\to 0} f(x+dx,y+dy) - f(x,y+dy) + \lim_{dy\to 0} f(x,y+dy) - f(x,y) \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx,y+dy) - f(x,y+dy)}{dx} dx + \lim_{dy\to 0} \frac{f(x,y+dy) - f(x,y)}{dy} \epsilon \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les composantes du champ de vecteur gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

3. Conditions d'obtention d'une différentielle

3.1. **Cas des fonctions de deux variables.**

Soit $\mathbf{V}(x,y)$ un champ de vecteur. On peut lui associer la forme différentielle suivante :

$$V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy$$

Cette forme différentielle est dite totale, car pour chacune des variables x et y de V apparaît l'élément différentiel correspondant, dx et dy. Cette forme différentielle est-elle exacte, autrement dit, est-elle la différentielle d'une fonction [1] ?

Soit $g(x,y)$ cette fonction, alors il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned}
V_x(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\
V_y(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il faut et il suffit que le champ de vecteur $\mathbf{V}(x,y)$ soit le gradient de la fonction $g(x,y)$:

$$\mathbf{V}(x,y) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g(x,y)$$

Si c'est effectivement le cas, alors la forme différentielle constitue une différentielle (dite totale exacte en thermodynamique), et,

$$V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy = dg(x,y)$$

1. Michel Hulin, *Thermodynamique*, édition Dunod 1994.

Théorème 3.1. *Condition de Schwarz*
Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle $V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy$ soit une différentielle (totale exacte) est :

$$\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} = 0$$

Démonstration. Soit $dg(x,y)$ la différentielle (totale exacte) cherchée, montrons dans un premier temps que :

$$V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy = dg(x,y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} = 0$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} dg(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,dy \\ &= V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy \end{aligned}$$

Les variables x et y étant indépendantes, on peut égaler les coefficients respectifs qui sont devant les différentielles dx et dy,

$$\begin{aligned} V_x(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ V_y(x,y) &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Si les dérivées partielles du second ordre de $g(x,y)$ sont continues, alors l'ordre de dérivation n'importe pas :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} \qquad (1) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que,

$$\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy = dg(x,y)$$

Posons :

$$\begin{aligned} g(x,y) - g(x_1,y_1) &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} dg(x,y) \\ &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} [V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy] \end{aligned}$$

Si la condition (1) est vérifiée, alors l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi. Pour le démontrer, nous avons besoin du théorème de Green :

Théorème 3.2. *Théorème de Green*
Soit D est un domaine fermé du plan xy limité par une courbe simple fermée C. Si $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont des fonctions continues de x et y ayant des dérivées continues dans D, alors,

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

où C est parcourue dans le sens trigonométrique.

Le théorème de Green ne sera pas démontré. En appliquant ce théorème pour $V_x = M$ et $V_y = N$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\oint_C (V_x dx + V_y dy) &= \iint_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdy \\
\oint_{ABCDA} (V_x dx + V_y dy) &= 0 \\
\int_{ABC} (V_x dx + V_y dy) + \int_{CDA} (V_x dx + V_y dy) &= 0 \\
\int_{ABC} (V_x dx + V_y dy) &= \int_{ADC} (V_x dx + V_y dy)
\end{aligned}$$

l'intégrale pour aller de A à C est donc indépendante du chemin suivi. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
g(x,y) - g(x_1,y_1) &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x,y_1)} [V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy] \\
&\quad + \int_{(x,y_1)}^{(x,y)} [V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy] \\
&= \int_{x_1}^{x} V_x(x,y_1)dx + \int_{y_1}^{y} V_y(x,y)dy
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_1}^{x} V_x(x,y_1)dx + \int_{y_1}^{y} V_y(x,y)dy\right] \\
&= V_y(x,y)
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{x_1}^{x} V_x(x,y_1)dx + \int_{y_1}^{y} V_y(x,y)dy\right] \\
&= V_x(x,y_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x}dy \\
&= V_x(x,y_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y}dy \\
&= V_x(x,y_1) + V_x(x,y) - V_x(x,y_1) \\
&= V_x(x,y)
\end{aligned}$$

La forme différentielle est donc une différentielle totale :

$$\begin{aligned}
V_x(x,y)dx + V_y(x,y)dy &= \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,dy \\
&= dg(x,y)
\end{aligned}$$

□

3.2. **Cas des fonctions de trois variables.**
Pour que la forme différentielle $V_x(x,y,z)dx+V_y(x,y,z)dy+V_z(x,y,z)dz$ soit une d.t.e., il faut et il suffit que :

$$\begin{cases}
V_x(x,y,z) = \dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \\
V_y(x,y,z) = \dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} \\
V_z(x,y,z) = \dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial z}
\end{cases}$$

autrement dit, il faut et il suffit que le vecteur $\mathbf{V}(x,y,z)$ soit le gradient de la fonction $h(x,y,z)$:

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h(x,y,z)$$

Théorème 3.3. *Condition de Schwarz*
Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle $V_x(x,y,z)dx+V_y(x,y,z)dy+V_z(x,y,z)dz$ soit une différentielle (totale exacte) est :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial y} = 0
\end{cases}$$

On notera que le rotationnel de $\mathbf{V}(x,y,z)$ est nul :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\mathbf{V}(x,y,z) = \mathbf{0}$$

Ce théorème permet de comprendre pourquoi le champ de vecteur $\mathbf{V}(x, y, z)$ ayant trois coordonnées peut s'écrire à l'aide du gradient d'un unique scalaire h. Il faut que ses trois coordonnées soient reliées entre elles par les trois relations précédentes. C'est cette dépendance des coordonnées qui est utilisée pour écrire $\mathbf{V}(x, y, z)$ sous la forme d'un gradient.

3.3. **Facteur intégrant.**

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{V}(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V}(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. La forme différentielle qui lui est associée,

$$V_x(x, y, z)dx + V_y(x, y, z)dy + V_z(x, y, z)dz$$

n'est donc pas une différentielle (totale exacte).

Existe-t-il une fonction scalaire $\mu(x, y, z)$ telle que $\mathbf{V}/\mu$ soit le gradient d'une fonction, et par conséquent telle que,

$$\frac{V_x}{\mu}\,dx + \frac{V_y}{\mu}\,dy + \frac{V_z}{\mu}\,dz$$

soit une d.t.e. ?

Si tel est le cas nous dirons que μ est un facteur intégrant pour la forme différentielle initiale.

$\mathbf{V}/\mu$ est le gradient d'une fonction ssi son rotationnel est nul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\,\frac{\mathbf{V}}{\mu} &= \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{\mu}\right) \times \mathbf{V}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

d'où,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V} = -\mu\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{\mu}\right) \times \mathbf{V}$$

ce qui implique que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V}$ est perpendiculaire à $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V} = 0$$

Cette relation constitue une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une fonction qui soit un facteur intégrant.

3.3.1. *Remarque 1.*

Pour les champs de vecteurs $\mathbf{V}(x, y)$ à deux dimensions, nous avons :

$$\mathbf{V}\begin{pmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\mathbf{V}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Par conséquent il existe toujours un facteur intégrant pour les champs de vecteurs à deux dimensions.

3.3.2. *Remarque 2.*
Soit un champ de vecteur $\mathbf{V}(x, y, z)$ tel que sa forme différentielle,

$$V_x(x, y, z)dx + V_y(x, y, z)dy + V_z(x, y, z)dz$$

ne soit pas une différentielle (totale exacte). Si l'on a pu lui associer un facteur intégrant μ, nous avons :

$$\frac{\mathbf{V}}{\mu} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x, y, z)$$

soit encore,

$$df = \frac{V_x}{\mu}\, dx + \frac{V_y}{\mu}\, dy + \frac{V_z}{\mu}\, dz$$

Soit $g(x, y, z)$ une fonction de la fonction $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} g &= F(f) \\ \frac{dg}{df} &= F' \\ dg &= F' df \\ &= \frac{V_x F'}{\mu}\, dx + \frac{V_y F'}{\mu}\, dy + \frac{V_z F'}{\mu}\, dz \end{aligned}$$

A partir du facteur intégrant μ on trouve la d.t.e. df, puis à partir de celle-ci on trouve f. On contruit une fonction F de f, que l'on dérive. On obtient ainsi une famille de facteurs intégrants μ/F' de la forme différentielle de départ.

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`