



Sur la figure 1, nous avons représenté en vert le grand cercle qui sépare le jour et la nuit. Il passe par un axe représenté en gris, qui est la perpendiculaire à l'écliptique passant par le centre de la Terre. Ce n'est donc pas un méridien puisqu'il ne passe pas par les pôles. Nous choisissons d'effectuer les calculs pour la ville de Paris. Le parallèle de Paris, de latitude  $49^\circ\text{N}$ , et de colatitude  $41^\circ\text{N}$ , est représenté en gris. La durée de la nuit est proportionnelle à l'angle  $\alpha$ . Pour déterminer cet angle, il nous faut d'abord trouver la longueur  $h$  :

$$\tan 23.45 = \frac{h}{R \cos 41}$$

$$h = R \cos 41 \times \tan 23.45$$

d'où l'on tire  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= h / (R \sin 41) \\ &= R \cos 41 \tan 23.45 / (R \sin 41) \\ &= \cot 41 \times \tan 23.45 \\ &= \tan 49 \times \tan 23.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos (\tan 49 \times \tan 23.45) \\ &= 60.07^\circ \end{aligned}$$

Grâce à l'angle  $\alpha$ , on trouve la durée de la nuit au solstice d'été à Paris :

$$\frac{\alpha^\circ}{180} \times 24h = 8h$$

## 2. CAS GÉNÉRAL

A chaque instant le grand cercle qui sépare le jour et la nuit tourne autour de la perpendiculaire à l'écliptique passant par le centre de la Terre, en suivant le Soleil (avec 8mn de retard, temps mis par la lumière pour nous parvenir du Soleil). Notez bien qu'il ne tourne pas autour du pôle Nord. Appelons  $n$  le nombre de jours écoulés depuis le solstice d'été, et, sur la figure 2, appelons  $\theta$  l'angle parcouru par le grand cercle à partir du solstice d'été. Si l'on fait l'approximation que la Terre décrit un cercle autour du Soleil, alors on obtient l'expression de  $\theta$  :

$$\theta = n \times \frac{360}{365.25}$$

L'angle  $\theta$  est nul au solstice d'été, il vaut  $90^\circ$  à l'équinoxe d'automne,  $180^\circ$  au solstice d'hivers, et  $270^\circ$  à l'équinoxe de printemps.

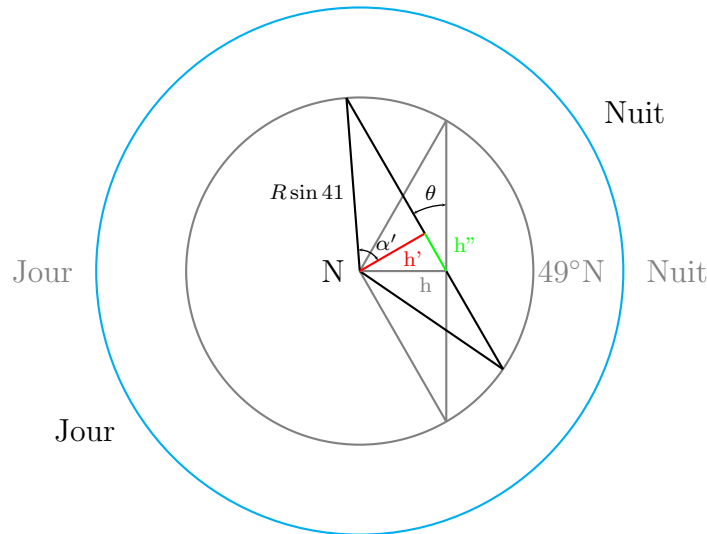


FIGURE 2. Cas général

Cherchons le nouvel angle  $\alpha'$  :

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha' &= h' / (R \sin 41) \\
 &= h \cos \theta / (R \sin 41) \\
 &= R \cos 41 \tan 23.45 \cos \theta / (R \sin 41) \\
 &= \cot 41 \tan 23.45 \cos \theta \\
 &= \tan 49 \tan 23.45 \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\alpha' = \arccos (\tan 49 \tan 23.45 \cos \theta)$$

Grâce à l'angle  $\alpha'$ , on trouve la durée de la nuit à Paris, pour n'importe quel jour de l'année :

$$\text{Durée de la nuit} = \arccos (\tan 49 \tan 23.45 \cos \theta) \times \frac{24h}{180}$$

### 3. DURÉE EFFECTIVE DU JOUR

La réfraction atmosphérique augmente la durée effective du jour. Elle est d'environ  $36'$  à l'horizon. De même la surface apparente du Soleil vu de la Terre est de  $30'$ . Si l'on considère qu'en moyenne le Soleil parcourt  $180^\circ$  en 12 h, cela correspond à 2 min 30 s de jour en plus dû à la réfraction, et 2 min de jour en plus dû à la surface apparente du Soleil. Enfin, la variation du jour solaire vrai<sup>2</sup>, due à l'excentricité de l'orbite terrestre et à l'obliquité de l'axe de rotation sur l'écliptique, font varier la durée du jour, de plus ou moins 20 s au maximum.

*E-mail address:* o.castera@free.fr

*URL:* <http://o.castera.free.fr/>

2. Voir Equation du temps.pdf