

# EINIGE ALLGEMEINE BEMERKUNGEN ZUM RELATIVITÄTSPRINZIP

W. V. IGNATOWSKY (BERLIN 1910)

Als Einstein seinerzeit das Relativitätsprinzip einführte, nahm er parallel mit demselben an, daß die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine universelle Konstante sei, d. h. für alle Koordinatensysteme denselben Wert behalte. Auch Minkowski ging bei seinen Untersuchungen von der Invariante  $r^2 - c^2 t^2$  aus, obwohl nach seinem Vortrage "Raum und Zeit"<sup>1</sup>, zu urteilen, er dem  $c$  mehr die Bedeutung einer universellen Raum-Zeit-Konstante beilegte, als diejenige der Lichtgeschwindigkeit. Nun habe ich mir die Frage gestellt, zu welchen Beziehungen bzw. Transformationsgleichungen man kommt, wenn man nur das Relativitätsprinzip an die Spitze der Untersuchung stellt und ob überhaupt die Lorentzschen Transformationsgleichungen die einzigen sind, die dem Relativitätsprinzip genügen.

Um diese Fragen beantworten zu können, wiederholen wir noch einmal, was uns das Relativitätsprinzip an und für sich ergibt. Haben wir zwei zueinander mit konstanter Geschwindigkeit translatorisch bewegte Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$ , so besagt uns das Relativitätsprinzip, daß beide Systeme als gleichwertig angesehen werden können, d. h. jedes von ihnen kann als ruhend und das andere als bewegt angesehen werden. Mit anderen Worten : wir können keine absolute Bewegung bestimmen.

Sind aber  $K$  und  $K'$  gleichwertig und können wir im System  $K$  irgendeine physikalische GröÙe  $E$  durch eine Funktion der Parameter  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ausdrücken, also schreiben

$$E = \varphi(a_1, a_2, a_3, \dots), \quad (1)$$

so muß die entsprechende GröÙe  $E'$  im System  $K'$  durch dieselbe Funktion  $\varphi$  der entsprechenden Parameter  $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$  ausgedrückt werden können, d. h. es wird sein

$$E' = \varphi(a'_1, a'_2, a'_3, \dots).$$

Angenommen, wir würden  $E'$  durch die ungestrichenen Parameter darstellen, z. B.

$$E' = f(a_1, a_2, a_3, \dots) \quad (2)$$

so muß, da  $K$  und  $K'$  gleichwertig sind, die Gleichung

$$E = f(a'_1, a'_2, a'_3, \dots) \quad (3)$$

richtig sein. Die Gleichungen (1) bis (3) bilden die mathematische Formulierung des Relativitätsprinzips. Bezeichnet weiter  $q$  die Geschwindigkeit des Systems  $K'$  in bezug auf  $K$ , von letzterem aus gemessen, und  $q'$  die Geschwindigkeit des Systems  $K$  von  $K'$  aus gemessen, so muß augenscheinlich sein

$$q' = -q$$

Betrachten wir nun einen rein kinematischen Vorgang, wo also nur  $x, y, z$  und  $t$  in Betracht kommen, so können wir z. B. folgende Gleichung hinschreiben

$$x' = \varphi(x, y, z, t, q) \quad (4)$$

und ähnliche für  $y', z'$  und  $t'$ . Denn  $x, y, z$  und  $t$  sind als Parameter zu betrachten, durch welche, unter anderen, eine physikalische Erscheinung beschrieben werden kann, und aus (1) bis (3) ersehen wir, daß im allgemeinen  $a_1$  nicht gleich  $a'_1$  zu sein braucht.

Obwohl die folgenden Rechnungen sehr elementar sind, so werde ich hier, zwecks Raumersparnis, nur den Gedankengang und die Endresultate anführen, und verweise auf die näheren Details in einem Artikel von mir, der demnächst in dem Archiv f. Math. u. Phys. erscheinen wird.

Wir bezeichnen den Einheitsvektor, der die Richtung in der Bewegung von  $K'$  in bezug auf  $K$  angibt, durch  $\mathbf{c}_0$ , legen die  $X$ -bzw.  $X'$ -Achse in diese Richtung und nehmen weiter zur Vereinfachung an, daß die  $X'$ -Achse die Verlängerung der  $X$ -Achse bildet. Da der Raum als homogen und isotrop anzunehmen ist, so läßt sich hieraus und aus Symmetriegründen zeigen, daß in der Gleichung (4)  $y$  und  $z$  nur implizite durch  $r$  auftreten können, wo  $r$  die Entfernung eines Punktes von der  $X$ -Achse bedeutet. Weiter läßt sich zeigen, daß  $r = r'$  sein muß und infolgedessen kann  $x'$  nicht von  $r$  abhängen. Wir können deshalb statt (4) schreiben

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi(x, t, q) \\ t' &= f(x, t, q) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1. Diese Zeitschr. 10, 104, 1909

und entsprechend wegen (2) und (3)

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(x', t', q') \\ t &= f(x', t', q') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nehmen wir das vollständige Differential von (5) und (6), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} dx' &= p dx + s dt \\ dt' &= p_1 dx + s_1 dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und

$$\left. \begin{aligned} dx &= p' dx' + s' dt' \\ dt &= p'_1 dx' + s'_1 dt' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo  $p, s, p', s'$  usw. die entsprechenden partiellen Differentialquotienten bedeuten, welche wir vorläufig noch als unbekannte Funktionen von  $x, t, q$  bzw.  $x', t', q'$  betrachten müssen. Es bezeichne  $D$  die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} p & p_1 \\ s & s_1 \end{vmatrix} = ps_1 - p_1 s$$

so folgt aus (7) und (8)

$$\left. \begin{aligned} p' &= \frac{s_1}{D}; & s' &= \frac{-s}{D} \\ p'_1 &= \frac{-p_1}{D}; & s'_1 &= \frac{p}{D} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wir nehmen jetzt in  $K$  und  $K'$  zwei Elemente  $dx$  und  $dx'$  von solcher Länge, daß, wenn sie gegenseitig auf Ruhe gebracht würden, sie gleich lang sind. Messen wir jetzt  $dx'$  synchron von  $K$  aus (also  $dt = 0$ ), so erhalten wir

$$dx' = p dx$$

Messen wir  $dx$  synchron von  $K'$  aus (also  $dt' = 0$ ), so folgt dementsprechend

$$dx = p' dx'$$

Nun sind beide Systeme  $K$  und  $K'$  gleichwertig und  $dx$  und  $dx'$ , gegenseitig auf Ruhe gebracht, gleich lang. Folglich müssen die von beiden Systemen aus gemessenen Längen gleich sein. Also ist

$$p = p' \quad (10)$$

Hieraus und (9) ergibt sich

$$p^2 = s_1 s'_1$$

Verfolgen wir jetzt die Bewegung irgendeines substantiellen Punktes oder irgendeiner Erscheinung im Raum und bezeichnen die entsprechende Geschwindigkeit durch  $\mathbf{v}$  bzw.  $\mathbf{v}'$ . Es ist dann auf Grund von (7) leicht nachzuweisen, daß

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (p-1)\mathbf{c}_0 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{v} + s \mathbf{c}_0}{A} \quad (11)$$

ist, wo

$$A = s_1 + p_1 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{v}$$

bedeutet. Da  $\mathbf{v}$  vollständig willkürlich ist, so ist klar, daß  $p, s$  usw. von  $\mathbf{v}$  nicht abhängen können. Nehmen wir an, der bewegliche Punkt ruhe in bezug auf  $K'$ . Dann ist  $\mathbf{v}' = 0$  und  $\mathbf{v} = q \mathbf{c}_0$ . Hieraus und aus (11) erhalten wir

$$s = -pq$$

Auf Grund des Vorhergehenden erhalten wir durch ähnliche Überlegungen

$$s_1 = p$$

so daß wir schreiben können

$$\left. \begin{aligned} dx' &= p dx - pq dt \\ dt' &= p_1 dx + p dt \end{aligned} \right\}$$

Es bleibt uns nur noch  $p_1$  et  $p$  zu bestimmen, denn die gestrichenen Größen erhalten wir aus (9). Zu diesem Zweck führen wir noch ein drittes Koordinatensystem  $K''$  ein, welches sich in derselben Richtung  $\mathbf{c}_0$  bewegt, mit einer Geschwindigkeit  $q_2$  gemessen von  $K$  aus. Die Geschwindigkeit von  $K''$  gemessen von  $K'$  aus, ist  $q_1$ . Für das Paar  $K'K''$ , bezeichnen wir die den  $p_1, p, q$  analogen Größen durch  $\bar{p}_1, \bar{p}, q_1$ , und für das Paar  $KK''$  durch  $p'', p'_1, q_2$ . Dann läßt sich leicht nachweisen, daß folgende Beziehung existiert:

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1} = \frac{p''_1}{p''q_2}$$

Da hier jeder Bruch voneinander unabhängige Größen enthält, so ersehen wir, daß derselbe nur eine Konstante sein kann, die wir durch  $-n$  bezeichnen. Wir erhalten also endgültig

$$\left. \begin{aligned} dx' &= p dx - pq dt \\ dt' &= -pq n dx + p dt \end{aligned} \right\}$$

Aus (10) und (9) ergibt sich ferner

$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

oder

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 n}} \quad (12)$$

Aus (12) folgt, daß  $n$ , welche Größe wir als eine universelle Raum—Zeit-Konstante bezeichnen können, das reziproke Quadrat einer Geschwindigkeit ist, also eine absolut positive Größe.

Wir ersehen, daß wir den Lorentzschen ähnliche Transformationsgleichungen erhalten haben, nur daß an Stelle von  $\frac{1}{c^2}$  hier  $n$  steht. Außerdem ist aber noch das Zeichen unbestimmt, denn wir konnten ebensogut unter der Wurzel in (12) das Pluszeichen setzen. Um jetzt nun den Zahlenwert und das Zeichen von  $n$  zu bestimmen, müssen wir uns an das Experiment wenden. Da wir uns bei der obigen Ableitung auf keine spezielle physikalische Erscheinung gestützt haben, so folgt, daß wir auf Grund einer beliebigen Erscheinung  $n$  bestimmen können und immer denselben Wert für  $n$  bekommen müssen, denn  $n$  ist ja eine universelle Konstante.

Wir können z. B. die Länge eines bewegten Meters von uns aus synchron messen. Ergibt die Messung, daß er sich verkürzt hat, so ist das Minuszeichen zu wählen und aus der Verkürzung läßt sich dann  $n$  berechnen. Nun wird aber bekanntlich diese Verkürzung so klein sein, daß wir sie nicht direkt werden messen können.

Wir wenden uns jetzt zu den elektrodynamischen Gleichungen und speziell zu dem Fall einer gleichförmig bewegten Punktladung. Wir wissen, abgesehen vom Relativitätsprinzip, daß die Niveauläche des Konvektionspotentials obiger Punktladung für den ruhenden Beobachter ein Heaviside-Ellipsoid sein wird, dessen Achsenverhältnis gleich  $\sqrt{1 - q^2/c^2}$  ist. Nun müssen wir auf Grund des Relativitätsprinzips schließen, daß für den mit der Punktladung mitbewegten Beobachter die Niveauläche des Potentials eine Kugel ist. Eine Kugel wird aber dem ruhenden Beobachter als ein Ellipsoid, mit dem Achsenverhältnis gleich  $\sqrt{1 - q^2 n}$ , erscheinen. Demnach muß sein  $\sqrt{1 - q^2/c^2} = \sqrt{1 - q^2 n}$ . Dies ergibt

$$n = \frac{1}{c^2}$$

Und hieraus erst folgt, daß  $c$  für alle Koordinatensysteme konstant ist. Zugleich ersehen wir, daß durch den Zahlenwert von  $c$  die universelle Raum—Zeit-Konstante  $n$  bestimmt wird.

Es ist jetzt klar, daß durch obige Ableitung der Transformationsgleichungen die Optik ihre Sonderstellung in bezug auf das Relativitätsprinzip verloren hat. Dadurch gewinnt das Relativitätsprinzip selbst an allgemeinerer Bedeutung, denn es hängt nicht mehr von einer speziellen physikalischen Erscheinung, sondern von der universellen Konstante  $n$  ab.

Dennoch können wir der Optik bzw. den elektrodynamischen Gleichungen eine Sonderstellung einräumen, aber nicht in bezug auf das Relativitätsprinzip, sondern in bezug auf die anderen Zweige der Physik, und zwar insofern, als es möglich war, aus diesen Gleichungen die Konstante  $n$  zu bestimmen.

Wenn wir andererseits die andern physikalischen Gleichungen dem Relativitätsprinzip entsprechend umformen und dabei das Vorkommen in denselben der Konstante  $n$  ersehen, so brauchen wir durchaus nicht zu schließen, daß hierbei irgendwelche elektrische Kräfte im Spiele sind, sondern folgern vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus nur, daß Raum und Zeit ihr Gepräge auf alle physikalischen Erscheinungen aufdrücken vermittelt der Konstante  $n$ .

Um noch deutlicher die Bedeutung von  $n$  zu veranschaulichen, ziehen wir eine Analogie aus der Optik heran, und zwar die Beziehung zwischen Bild und Objekt. Vom rein optisch-geometrischen Standpunkte aus sind Objekt und Bild vertauschbar. Genau dasselbe trifft zu, wenn wir einen bewegten Maßstab beobachten, der uns verkürzt erscheint. Wir können sagen, daß Raum und Zeit uns den bewegten Maßstab abbilden, so daß wir nur das Bild desselben sehen, wenn wir den ruhenden Maßstab als Objekt annehmen.

Wir können also in vollem Maße Minkowski beistimmen, welcher in seinem Vortrage "Raum und Zeit"<sup>2</sup> sagt: "Die Kontraktion ist nicht etwa als Folge von Widerständen im Äther zu denken, sondern rein als Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes der Bewegung", eben weil  $n$  eine universelle Konstante ist.

Zum Schlusse möchte ich noch mit ein paar Worten die vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus möglichen Geschwindigkeiten erwähnen. Betrachten wir den Ausdruck (12) für  $p$ . Von  $p$  hängt die Verkürzung ab, die wir bei einer mit dem System  $K'$  bewegten Strecke beobachten. Es hat deshalb keinen Sinn, anzunehmen, daß  $p$  imaginär werden kann, d. h.  $q$  muß stets kleiner als  $c$  sein. Was bedeutet aber  $q$ ? Es bedeutet  $q$  die Geschwindigkeit des Koordinatensystems  $K'$ , und also kann diese nicht größer als  $c$  sein. Mit anderen Worten: keines

2. I. c. S. 106.

von den Ruhekoordinatensystemen kann sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Nun dürfen wir aber unter einem Ruhekoordinatensystem nicht etwa nur ein mathematisches Gebilde verstehen, sondern müssen uns dabei eine materielle Welt mit ihren Beobachtern und synchronen Uhren denken. Umgekehrt nehmen wir an, daß wir jeden substantiellen Punkt auf Ruhe transformieren können. Hieraus folgt demnach, daß sich ein substantieller Punkt nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann.

Nun fragt es sich: Gibt es Geschwindigkeiten, nicht von substantiellen Punkten, sondern von Erscheinungen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, abgesehen von Phasen bzw. von Gruppengeschwindigkeiten? Diese Frage müssen wir im bejahenden Sinne beantworten.

Ohne auf die näheren Details einzugehen, in bezug auf welche ich auf meine letzte Arbeit in den Ann. d. Phys. verweise<sup>3</sup>, möchte ich hier nur in Kürze an einem Beispiel diese Frage erläutern.

Aus den Lorentzschen Transformationsgleichungen läßt sich folgendes leicht ableiten. Es bedeute  $x_2 - x_1$  die Entfernung zweier im System  $K$  festen Punkte in der Richtung von  $\mathbf{c}_0$ . Diese Entfernung werde nun vom bewegten Beobachter in  $K'$ , synchron gemessen, wobei er die Strecke  $l'$  erhält. Für den ruhenden Beobachter werden dabei die beiden synchronen Uhren, die der Beobachter in  $K'$  an den beiden Enden von  $l'$  aufgestellt hat, um seine synchrone Messung von  $x_2 - x_1$  zu machen, eine Zeitdifferenz  $t_2 - t_1$  aufweisen, die gleich ist:

$$t_2 - t_1 = qn(x_2 - x_1) \quad (13)$$

hieraus folgt

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q}$$

Nun denken wir uns in dem System  $K'$  einen Stab von der Länge  $l'$  und nehmen an, die Beobachter auf  $K'$  hätten sich verabredet, den Stab zu gleicher Zeit (mit Hilfe ihrer synchronen Uhren) an beiden Enden, senkrecht zu  $\mathbf{c}_0$ , aufzuheben. Für den ruhenden Beobachter wird dies aber nicht zu gleicher Zeit geschehen, und zwar wird ihm in dem Moment, wo das eine Ende des Stabes mit  $x_1$  zusammenfällt, dasselbe erhoben erscheinen, das andere Ende erst dann, wenn es mit dem Punkt  $x_2$  zusammenfällt, also nach einer Zeit  $t_2 - t_1$ , die sich aus (13) berechnet. Der Stab wird für den ruhenden Beobachter einen Knick aufweisen, der sich für ihn mit einer Geschwindigkeit  $V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$  bewegen wird. Aus (14) erhalten wir

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c \quad (14)$$

denn  $q$  ist, wie früher bemerkt, stets kleiner als  $c$ .

Wir wenden uns jetzt zu der Gleichung (11), welche wir, da uns jetzt alle Größen  $p, s, p_1$  und  $s_1$  bekannt sind, folgendermaßen schreiben können:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + (p - 1)\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_0 \mathbf{v} - pq\mathbf{c}_0}{p(1 - qn\mathbf{c}_0 \mathbf{v})} \quad (15)$$

Nun nehmen wir an, es bewege sich etwas in der Richtung von  $\mathbf{c}_0$  mit einer Geschwindigkeit  $v$ . Dann ist  $\mathbf{v} = v\mathbf{c}_0$ , und wir erhalten aus (15), wenn wir zugleich den Einheitsvektor  $\mathbf{c}_0$  streichen,

$$v' = \frac{v - q}{1 - vqn} \quad (16)$$

Aus (14) ersehen wir, daß sich der Knick für uns, d. h. für den ruhenden Beobachter, um so schneller fortpflanzt, je kleiner  $q$  ist, also je langsamer sich  $K'$  in bezug auf  $K$  bewegt. Denken wir uns jetzt an die Stelle der bewegten Beobachter, so wird uns die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Knickes unendlich groß erscheinen, denn die Beobachter heben ja den Stab zu gleicher Zeit laut ihren synchronen Uhren auf. Dasselbe Resultat erhalten wir auch aus (16). Denn ersetzen wir dort den Wert von  $v$  durch  $V$  aus (14), so ergibt sich  $v' = \infty$ .

Wir können demnach sagen, um die Bedeutung von  $V$  noch prägnanter zu charakterisieren, daß  $V$  diejenige Geschwindigkeit ist, welche man im System  $K$  benötigt, um die Zeit im System  $K'$  einzuholen. Die Existenz der Geschwindigkeit

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c \quad (17)$$

ist als eine Folgerung aus dem Relativitätsprinzip aufzufassen und insbesondere ergibt sie sich als unmittelbare Konsequenz der Begriffe von synchronen Uhren und synchronen Messungen.

(Eingegangen 23. September 1910.)

3. Bd. 33, 607, 1910.