EQUATION DE POISSON

OLIVIER CASTÉRA

TABLE DES MATIÈRES

1. Théorème de divergence

Théorème 1. *Théorème de divergence*
Soit $\boldsymbol{A}$ un champ de vecteurs. Pour toute surface fermée S, de normale sortante $\boldsymbol{n}$:

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V div\,\boldsymbol{A}\,dV$$

Démonstration. Soit S une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées cartésiennes, coupe S en au plus deux points [1] :

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \oiint_S (A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}\,dS\\ &= \oiint_S A_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \oiint_S A_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \oiint_S A_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\end{aligned}$$

Calculons par exemple le dernier terme du membre de droite. Imaginons un plan horizontal coupant la surface fermée S en deux, de sorte que la ligne d'intersection soit la plus longue possible. Nous intégrons maintenant sur les deux surfaces S_1 et S_2 non fermées, de normales sortantes respectives $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$:

$$\oiint_S A_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_{S_1} A_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_1\,dS_1 + \iint_{S_2} A_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_2\,dS_2$$

Les surfaces S_1 et S_2 ont pour équation respective :

$$\begin{aligned}S_1 &: z = z_1(x,y)\\ S_2 &: z = z_2(x,y)\end{aligned}$$

Date: 7 novembre 2015.

1. Cf. Murray R. Spiegel, *Analyse vectorielle*, Schaum (1973)

Supposons S_1 en bas et S_2 en haut :

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_1\, dS_1 = -dxdy$$
$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_2\, dS_2 = dxdy$$

Soit R le domaine d'intégration en x, y :

$$\begin{aligned}
\oiint_S A_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\, dS &= \iint\limits_R A_z(x,y,z_2)\, dxdy - \iint\limits_R A_z(x,y,z_1)\, dxdy\\
&= \iint\limits_R [A_z(x,y,z_2) - A_z(x,y,z_1)]\, dxdy\\
&= \iint\limits_R \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial A_z}{\partial z}\, dz\right) dxdy\\
&= \iiint\limits_V \frac{\partial A_z}{\partial z}\, dV
\end{aligned}$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les coordonnées x et y :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS &= \iiint\limits_V \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dV + \iiint\limits_V \frac{\partial A_y}{\partial y}\, dV + \iiint\limits_V \frac{\partial A_z}{\partial z}\, dV\\
&= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV
\end{aligned}$$

Définition 1. *On appelle div, l'opérateur différentiel divergence, tel qu'appliqué à tout vecteur $\boldsymbol{A}$ on ait :*

$$div\, \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et par conséquent :

$$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iiint\limits_V div \boldsymbol{A}\, dV$$

Le théorème peut s'étendre aux surfaces qui ne satisfont pas la condition que des droites parallèles aux axes de coordonnées cartésiennes les coupent en au plus deux points. Pour établir cette généralisation, subdiviser le domaine S en sous-domaines dont les surfaces satisfont la condition. □

2. Théorème de Gauss

Théorème 2.
Soit $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ le vecteur position d'un point quelconque, mesuré à partir d'une origine O :

$$O \text{ est extérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\, dS = 0$$
$$O \text{ est intérieur à } S, \quad \oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\, dS = 4\pi$$

Démonstration. A partir du théorème de divergence, posons $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}$:

$$\oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}}{r^2}\, dS = \iiint\limits_V div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) dV$$

Dans le membre de droite, r parcourt tout le volume. Supposons $r \neq 0$, c'est à dire O extérieur à S :

$$\begin{aligned}
div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) &= div\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\
&= div\left(\frac{x}{r^3}\,\boldsymbol{i} + \frac{y}{r^3}\,\boldsymbol{j} + \frac{z}{r^3}\,\boldsymbol{k}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] \\
&= \frac{1}{r^6}\left(r^3 - x \times 2x \times \tfrac{3}{2} r\right) \\
&= \frac{1}{r^6}\left(r^3 - 3x^2 r\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) &= \frac{1}{r^6}\left(3r^3 - 3(x^2+y^2+z^2)r\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Supposons maintenant O intérieur à S. Entourons O d'une petite sphère s de rayon a et de volume v. Soit $\mathcal{V}$ le volume intérieur à S et extérieur à s, et soient $\boldsymbol{n}_S$ et $\boldsymbol{n}_s$ les normales sortantes respectives des surfaces S et s :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}_S}{r^2}\, dS - \oiint_s \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}_s}{r^2}\, ds &= \iiint\limits_V div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) dV - \iiint\limits_v div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) dv \\
&= \iiint\limits_{\mathcal{V}} div\left(\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) d\mathcal{V} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car O est extérieur à $\mathcal{V}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}_S}{r^2}\, dS &= \oiint_s \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}_s}{r^2}\, ds \\
&= \frac{1}{a^2}\oiint_s ds \\
&= \frac{4\pi a^2}{a^2} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

□

3. Loi de Gauss pour la gravitation

Soient deux corps de masse M et m, le modèle de force $\boldsymbol{F}$ pour la force de gravitation s'exerçant entre ces deux corps s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

Le modèle du champ de gravitation créé par le corps de masse M s'écrit alors :

$$\boldsymbol{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

Théorème 3. *Loi de Gauss, forme intégrale*
Soit $\boldsymbol{g}$ un champ de gravitation, par exemple celui de la Terre. Soit M la masse de la Terre :

$$\oiint_S \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -4\pi GM$$

Démonstration. En appliquant le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\,dS &= \oiint_S -\frac{GM}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\
&= -GM\oiint_S \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\,dS \\
&= -4\pi GM
\end{aligned}$$

□

Théorème 4. *Loi de Gauss, forme différentielle*
Soit $\boldsymbol{g}$ un champ de gravitation, par exemple celui de la Terre. Soit ρ la masse volumique de la Terre :

$$div\,\boldsymbol{g} = -4\pi\rho G$$

Démonstration. A partir du théorème de divergence et de la forme intégrale du théorème de Gauss appliqué au champ de gravitation :

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V div\,\boldsymbol{g}\,dV &= \oiint_S \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \\
&= -4\pi GM \\
&= \iiint\limits_V -4\pi G\rho\,dV \\
div\,\boldsymbol{g} &= -4\pi\rho G
\end{aligned}$$

□

Théorème 5. *Equation de Poisson*
Soit ϕ le potentiel du champ de gravitation terrestre :

$$\Delta\phi = 4\pi\rho G$$

Démonstration. Le champ de gravitation est conservatif, il dérive d'un potentiel ϕ tel que $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{grad}\,\phi$:

$$\begin{aligned} div\,\boldsymbol{g} &= -4\pi\rho G \\ -div\,\boldsymbol{grad}\,\phi &= -4\pi\rho G \\ \Delta\phi &= 4\pi\rho G \end{aligned}$$

□

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/