ESPACES TANGENTS ET OSCULATEURS

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Deux espaces dont les métriques ont mêmes coefficients en un point sont dits *tangents* en ce point. Deux espaces dont les métriques ont mêmes coefficients en un point et mêmes dérivées de ces coefficients sont dits *osculateurs* en ce point. Cette notion ne s'applique pas aux espaces euclidiens (dont la droite et le plan sont des exemples). Ils peuvent être tangents mais ne peuvent pas être osculateurs.

TABLE DES MATIÈRES

1 EN DEUX DIMENSIONS

1.1 Droite tangente

Exemple 1.1. *Soit (o, x, y) un repère cartésien de l'espace euclidien de dimension deux (le plan euclidien). Le carré de l'élément de longueur s'écrit $ds^2 = dx^2 + dy^2$. On considère la parabole d'équation $y = x^2$. En différentiant :*

$$dy = 2xdx$$

Si l'élément de longueur appartient à la parabole :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2 + 4x^2dx^2 \\ &= \left(4x^2 + 1\right) dx^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique de la parabole n'a qu'un élément :

$$g_{xx} = 4x^2 + 1$$

On note que c'est également le tenseur métrique de la parabole d'équation $y = -x^2$. On considère la droite d'équation $y = ax + b$ (espace euclidien de dimension un). En différentiant :

$$dy = adx$$

Date: 17 mars 2022.

Si l'élément de longueur appartient à la droite :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2 + a^2 dx^2 \\ &= \left(a^2 + 1\right) dx^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique de la droite n'a qu'un élément :

$$g_{xx} = a^2 + 1$$

Si en un point $M(x_0, y_0)$ appartenant à deux courbes les métriques sont égales alors les courbes sont tangentes en ce point. Les droites tangentes en $M(x_0, y_0)$ à la parabole sont telles que les métriques sont égales en ce point :

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= 4x_0^2 + 1 \\ a &= \pm 2x_0 \end{aligned}$$

On conserve le signe positif car le signe négatif correspond aux droites tangentes à la parabole d'équation $y = -x^2$:

$$a = 2x_0$$

Le point $M(x_0, y_0)$ appartient à la parabole, $y_0 = x_0^2$, et à la droite $y_0 = ax_0 + b$:

$$\begin{aligned} b &= y_0 - ax_0 \\ &= x_0^2 - 2x_0^2 \\ &= -x_0^2 \end{aligned}$$

L'équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ à la parabole s'écrit :

$$y = 2x_0 x - x_0^2$$

Par exemple au point $(1, 1)$ de la parabole :

$$y = 2x - 1$$

Si l'on tente de chercher la droite osculatrice à la parabole on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 + 1\right)\Big|_{x_0} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(4x^2 + 1\right)\Big|_{x_0} \\ 0 &= 8x_0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui n'a pas de sens.

1.2 Cercles tangents

Exemple 1.2. *On considère le cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon r, d'équation :*

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

En différentiant :

$$\begin{aligned} 2(x - x_c)\, dx + 2(y - y_c)\, dy &= 0 \\ dy &= \frac{-(x - x_c)}{y - y_c}\, dx \\ dy^2 &= \frac{(x - x_c)^2}{(y - y_c)^2}\, dx^2 \end{aligned}$$

Si l'élément de longueur appartient au cercle :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2 + \frac{(x-x_c)^2}{(y-y_c)^2}\,dx^2 \\ &= \left[\frac{(x-x_c)^2}{(y-y_c)^2} + 1\right] dx^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique du cercle n'a qu'un élément :

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \frac{(x-x_c)^2}{(y-y_c)^2} + 1 \\ &= \frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{(y-y_c)^2} \\ &= \frac{r^2}{r^2 - (x-x_c)^2} \end{aligned}$$

Au point de tangence $M(x_0, y_0)$ les métriques sont égales :

$$\begin{aligned} 4x_0^2 + 1 &= \frac{(x_0-x_c)^2}{(y_0-y_c)^2} + 1 \\ 4x_0^2\,(y_0-y_c)^2 &= (x_0-x_c)^2 \\ (y_0-y_c)^2 &= \left(\frac{x_0-x_c}{2x_0}\right)^2 \\ y_0 - y_c &= \pm\frac{x_0-x_c}{2x_0} \\ y_c &= y_0 \mp \frac{x_0-x_c}{2x_0} \end{aligned}$$

On conserve le signe positif car le signe négatif correspond aux cercles tangents à la parabole d'équation $y = -x^2$:

$$y_c = y_0 + \frac{x_0-x_c}{2x_0} \tag{1}$$

Cherchons si le fait que le point M appartienne aux deux courbes apporte une nouvelle équation. Reprenons le calcul en utilisant le rayon :

$$\begin{aligned} 4x_0^2 + 1 &= \frac{r^2}{r^2 - (x_0-x_c)^2} \\ 4x_0^2 r^2 - \left(4x_0^2+1\right)(x_0-x_c)^2 &= 0 \\ r^2 &= \frac{4x_0^2+1}{4x_0^2}\,(x_0-x_c)^2 \\ r &= \pm\frac{\sqrt{4x_0^2+1}}{2x_0}\,(x_0-x_c) \end{aligned}$$

Le point $M(x_0, y_0)$ appartient à la parabole et au cercle :

$$\begin{aligned}
(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 &= r^2 \\
x_0^2 - y_c &= \pm\sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\
y_c &= x_0^2 \mp \sqrt{r^2 - (x_0 - x_c)^2} \\
&= x_0^2 \mp \sqrt{\frac{4x_0^2 + 1}{4x_0^2}\,(x_0 - x_c)^2 - (x_0 - x_c)^2} \\
&= x_0^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4x_0^2}\,(x_0 - x_c)^2} \\
&= x_0^2 \mp \frac{x_0 - x_c}{2x_0}
\end{aligned}$$

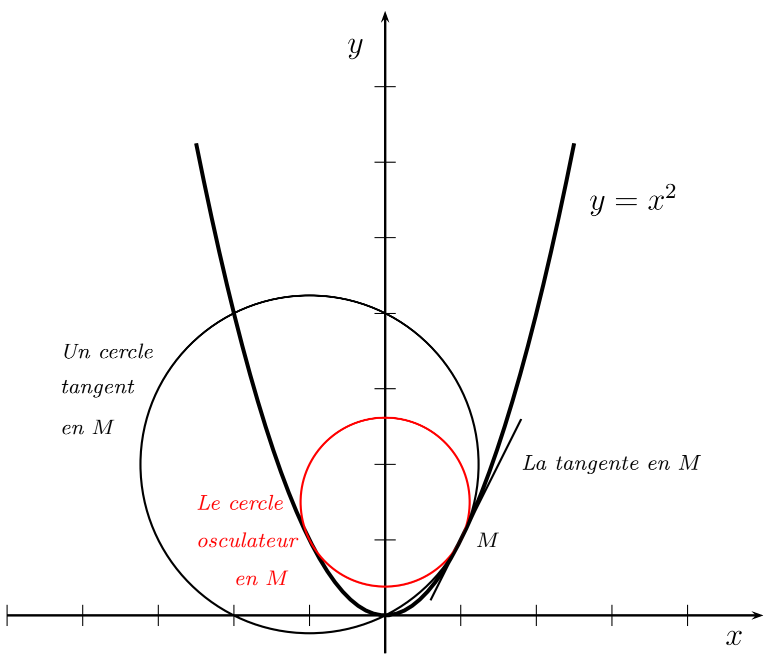
Nous retrouvons l'équation (1). Nous n'avons donc qu'une seule équation pour les deux inconnues x_c, y_c. Alors qu'il n'existe qu'une droite tangente en un point quelconque de la parabole, il existe une infinité de cercles tangents en chaque point $M(x_0, y_0)$ de la parabole. Les centres de ces cercles constituent la droite perpendiculaire à la parabole au point considéré. Par exemple au point $(1, 1)$ de la parabole,

$$r = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\,(1 - x_c) \qquad \text{et} \qquad y_c = 1 + \frac{1 - x_c}{2}$$

Si l'on prend $x_c = -1$,

$$r = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad y_c = 2$$

1.3 Cercle osculateur



Exemple 1.3. *On considère le cercle de centre (x_c, y_c) et de rayon r, d'équation :*

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

osculateur à la parabole d'équation $y = x^2$. Nous avons alors toujours l'égalité des métriques au point $M(x_0, y_0)$ qui donne,

$$(y_0 - y_c)^2 = \left(\frac{x_0 - x_c}{2x_0}\right)^2$$

Le cercle étant osculateur à la parabole, nous avons aussi l'égalité des dérivées des métriques au point $M(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2 + 1\right)\bigg|_{x_0} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(x - x_c)^2}{(y - y_c)^2} + 1\right]_{x_0} \\
8x_0 &= \frac{2\,(x_0 - x_c)}{(y_0 - y_c)^2} \\
(y_0 - y_c)^2 &= \frac{x_0 - x_c}{4x_0}
\end{aligned}$$

Si bien que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_0 - x_c}{2x_0}\right)^2 &= \frac{x_0 - x_c}{4x_0} \\
x_0 - x_c &= x_0 \\
x_c &= 0
\end{aligned}$$

Le centre du cercle osculateur à la parabole est sur l'axe des ordonnées, et son ordonnée vaut :

$$\begin{aligned}
y_c &= y_0 + \frac{x_0 - x_c}{2x_0} \\
&= y_0 + \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Par exemple au point $(1, 1)$ le centre du cercle osculateur a pour coordonnées $(0; 1, 5)$ et pour rayon :

$$\begin{aligned}
r^2 &= (x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 \\
&= 1^2 + (1 - 1, 5)^2 = \frac{5}{4} \\
r &= \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1, 118
\end{aligned}$$

2 En trois dimensions

2.1 Plan tangent

Exemple 2.1. *Soit (o, x, y, z) un repère cartésien de l'espace euclidien de dimension trois. Le carré de l'élément de longueur s'écrit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. On considère le paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$. En différentiant :*

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

Si l'élément de longueur appartient au paraboloïde de révolution :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + 4x^2dx^2 + 4y^2dy^2 + 8xydxdy \\ &= \left(4x^2 + 1\right) dx^2 + \left(4y^2 + 1\right) dy^2 + 8xydxdy \end{aligned}$$

Le tenseur métrique du paraboloïde de révolution a pour éléments :

$$\begin{cases} g_{xx} = 4x^2 + 1 \\ g_{yy} = 4y^2 + 1 \\ g_{xy} = g_{yx} = 4xy \end{cases}$$

On note que c'est également le tenseur métrique du paraboloïde de révolution d'équation $z = -x^2 - y^2$. *On considère le plan euclidien d'équation* $ax + by + cz + d = 0$ *(espace euclidien de dimension deux). En différentiant :*

$$adx + bdy + cdz = 0$$

Si l'élément de longueur appartient au plan :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{c^2}\left(-adx - bdy\right)^2 \\ &= \left(\frac{a^2}{c^2} + 1\right) dx^2 + \left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right) dy^2 + \frac{2ab}{c^2}dxdy \end{aligned}$$

Le tenseur métrique du plan a pour éléments :

$$\begin{cases} g_{xx} = \dfrac{a^2}{c^2} + 1 \\ g_{yy} = \dfrac{b^2}{c^2} + 1 \\ g_{xy} = g_{yx} = \dfrac{ab}{c^2} \end{cases}$$

Les plans tangents en $M(x_0, y_0, z_0)$ *au paraboloïde de révolution sont tels que les métriques sont égales en ce point :*

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{c^2} + 1 = 4x_0^2 + 1 \\ \dfrac{b^2}{c^2} + 1 = 4y_0^2 + 1 \\ \dfrac{ab}{c^2} = 4x_0y_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = \pm 2cx_0 \\ b = \pm 2cy_0 \\ ab = 4c^2x_0y_0 \end{cases}$$

Les deux premières égalités donnent $ab = \pm 4c^2x_0y_0$. *Pour être conforme à la troisième égalité on doit avoir la condition suivante : Si* $a = 2cx_0$ *alors* $b = 2cy_0$, *et si* $a = -2cx_0$ *alors* $b = -2cy_0$. *On conserve le signe négatif car le signe positif correspond aux plans tangents au paraboloïde de révolution d'équation* $z = -x^2 - y^2$ *:*

$$\begin{cases} a = -2cx_0 \\ b = -2cy_0 \end{cases}$$

Le point $M(x_0, y_0, z_0)$ *appartient au paraboloïde de révolution,*

$$z_0 = x_0^2 + y_0^2$$

et au plan :

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ -2cx_0^2 - 2cy_0^2 + cz_0 + d &= 0 \\ -2cz_0 + cz_0 + d &= 0 \\ d &= cz_0 \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} a = -2cx_0 \\ b = -2cy_0 \\ d = cz_0 \end{cases}$$

L'équation du plan tangent en $M(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} -2cx_0x - 2cy_0y + cz + cz_0 &= 0 \\ -2x_0x - 2y_0y + z + z_0 &= 0 \end{aligned}$$

Par exemple le plan tangent au paraboloïde de révolution au point $(1, 1, 2)$ a pour équation : $-2x - 2y + z + 2 = 0$. En chaque point du paraboloïde de révolution il n'existe qu'un seul plan tangent.

2.2 Sphères tangentes

Exemple 2.2. *On considère la sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon r, d'équation :*

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

En différentiant :

$$\begin{aligned} &2(x - x_c)\,dx + 2(y - y_c)\,dy + 2(z - z_c)\,dz = 0 \\ &dz = \frac{-(x - x_c)}{z - z_c}\,dx - \frac{(y - y_c)}{z - z_c}\,dy \\ &dz^2 = \frac{(x - x_c)^2}{(z - z_c)^2}\,dx^2 + \frac{(y - y_c)^2}{(z - z_c)^2}\,dy^2 + \frac{2(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2}\,dxdy \end{aligned}$$

Si l'élément de longueur appartient à la sphère :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{(x - x_c)^2}{(z - z_c)^2}\,dx^2 + \frac{(y - y_c)^2}{(z - z_c)^2}\,dy^2 + \frac{2(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2}\,dxdy \\ &= \left[\frac{(x - x_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1\right] dx^2 + \left[\frac{(y - y_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1\right] dy^2 + \frac{2(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2}\,dxdy \end{aligned}$$

Le tenseur métrique de la sphère a pour éléments :

$$\begin{cases} g_{xx} = \dfrac{(x - x_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1 \\ g_{yy} = \dfrac{(y - y_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1 \\ g_{xy} = g_{yx} = \dfrac{(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2} \end{cases}$$

Les sphères tangentes en $M(x_0, y_0, z_0)$ au paraboloïde de révolution sont telles que les métriques sont égales en ce point :

$$\begin{cases} \dfrac{(x_0 - x_c)^2}{(z_0 - z_c)^2} + 1 = 4x_0^2 + 1 \\ \dfrac{(y_0 - y_c)^2}{(z_0 - z_c)^2} + 1 = 4y_0^2 + 1 \\ \dfrac{(x_0 - x_c)(y_0 - y_c)}{(z_0 - z_c)^2} = 4x_0 y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - x_c)^2 = 4x_0^2 (z_0 - z_c)^2 \\ (y_0 - y_c)^2 = 4y_0^2 (z_0 - z_c)^2 \\ (x_0 - x_c)(y_0 - y_c) = 4x_0 y_0 (z_0 - z_c)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 - x_c = \pm 2x_0 (z_0 - z_c) \\ y_0 - y_c = \pm 2y_0 (z_0 - z_c) \\ (x_0 - x_c)(y_0 - y_c) = 4x_0 y_0 (z_0 - z_c)^2 \end{cases}$$

Donc $x_0 - x_c$ et $y_0 - y_c$ sont du même signe. On conserve le signe négatif :

$$\begin{cases} x_c = x_0 + 2x_0 (z_0 - z_c) \\ y_c = y_0 + 2y_0 (z_0 - z_c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = x_0[1 + 2(z_0 - z_c)] \\ y_c = y_0[1 + 2(z_0 - z_c)] \end{cases}$$

Nous n'avons que deux équations pour trois inconnues x_c, y_c, z_c. Il existe donc une infinité de sphères tangentes en chaque point du paraboloïde de révolution. Les centres de ces sphères constituent la droite perpendiculaire au paraboloïde au point concerné. Par exemple au point $M(1, 0, 1)$ nous avons :

$$\begin{cases} x_c = 3 - 2z_c \\ y_c = 0 \end{cases}$$

Si l'on prend $x_c = -1$ le centre de la sphère tangente a pour coordonnées $(-1, 2, 0)$. Nous retrouvons ce que nous avions trouvé en 2D avec la parabole et le cercle.

2.3 Sphère osculatrice

Exemple 2.3. *On considère la sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon r, d'équation :*

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

osculatrice au paraboloïde de révolution d'équation $z = x^2 + y^2$. Nous avons toujours l'égalité des métriques au point $M(x_0, y_0, z_0)$ qui donne,

$$\begin{cases} x_c = x_0[1 + 2(z_0 - z_c)] \\ y_c = y_0[1 + 2(z_0 - z_c)] \end{cases}$$

et l'égalité des dérivées des métriques au point $M(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(4x^2 + 1\right)_M = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{(x - x_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1\right]_M \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(4y^2 + 1\right)_M = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{(y - y_c)^2}{(z - z_c)^2} + 1\right]_M \\ \left.\dfrac{\partial 4xy}{\partial x}\right|_M = \dfrac{\partial}{\partial x}\left.\dfrac{(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2}\right|_M \\ \left.\dfrac{\partial 4xy}{\partial y}\right|_M = \dfrac{\partial}{\partial y}\left.\dfrac{(x - x_c)(y - y_c)}{(z - z_c)^2}\right|_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 = \dfrac{x_0 - x_c}{(z_0 - z_c)^2} \\ 4y_0 = \dfrac{y_0 - y_c}{(z_0 - z_c)^2} \\ 4y_0 = \dfrac{y_0 - y_c}{(z_0 - z_c)^2} \\ 4x_0 = \dfrac{x_0 - x_c}{(z_0 - z_c)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_0\left(z_0-z_c\right)^2 = x_0 - x_c \\ 4y_0\left(z_0-z_c\right)^2 = y_0 - y_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = x_0\left[1-4\left(z_0-z_c\right)^2\right] \\ y_c = y_0\left[1-4\left(z_0-z_c\right)^2\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0\left[1-4\left(z_0-z_c\right)^2\right] = x_0[1+2(z_0-z_c)] \\ y_0\left[1-4\left(z_0-z_c\right)^2\right] = y_0[1+2(z_0-z_c)] \end{cases}$$

Ces égalités étant similaires :

$$-4\left(z_0-z_c\right)^2 = 2(z_0-z_c) \qquad \Rightarrow \qquad z_0 - z_c = -\tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z_c = z_0 + \tfrac{1}{2}$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} x_c = x_0\left[1+2\left(z_0-z_0-\tfrac{1}{2}\right)\right] \\ y_c = y_0\left[1+2\left(z_0-z_0-\tfrac{1}{2}\right)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = 0 \end{cases}$$

Le centre de la sphère osculatrice se trouve sur l'axe des z. Nous retrouvons ce que nous avions trouvé en deux dimensions avec la parabole et le cercle.

Email address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`