LES FORCES FICTIVES

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des forces fictives, elles n'apparaissent que dans des référentiels non inertiels.

Table des matières

1. Vitesse dans un référentiel non inertiel

Définition 1.1. Référentiel d'inertie
R est un référentiel (une référence dans l'espace et le temps) d'inertie, si et seulement si ce référentiel se déplace d'un mouvement de translation (il n'a aucun mouvement de rotation par rapport au reste de l'univers) rectiligne (il ne subit pas de force normale) et uniforme (il ne subit pas de force tangentielle).

Soit donc $R(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ un référentiel d'inertie, et soit $R'(O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ un référentiel non inertiel se déplaçant par rapport à R à la vitesse non constante $\boldsymbol{V}(t)$ et tournant autour de son axe $O'z'$ à la vitesse angulaire non constante $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Définition 1.2. Rayons vecteurs
Les rayons vecteurs $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{O'M}$ du corps (M) dans chacun des référentiels R et R' ont pour expressions respectives :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{O'M} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$$

On se place dans le domaine non relativiste :

Date: 2 avril 2017.

Définition 1.3. Temps
Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, s'écoule uniformément et s'appelle durée.

Par conséquent, le temps s'écoule de la même façon dans les référentiels R et R',

$$t = t'$$

de sorte que les dérivations par rapport à t et à t' soient équivalentes.

Notation. La dérivée par rapport au temps d'un vecteur sera notée d_t^R pour un observateur fixe dans le référentiel R, et $d_t^{R'}$ pour un observateur fixe dans le référentiel R'.

Théorème 1.1. *Par changement de référentiel, les vecteurs vitesses du corps (M) sont liés par la relation suivante,*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M} \tag{1}$$

appelée loi de composition des vitesses, dans laquelle $\boldsymbol{v}$ est la vitesse absolue, $\boldsymbol{V}$ est la vitesse relative des référentiels, $\boldsymbol{v}'$ est la vitesse relative, et $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire relative de R' par rapport à R.

Démonstration. Dérivons dans R par rapport à t l'égalité vectorielle :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} \\ d_t^R \boldsymbol{OM} &= d_t^R \boldsymbol{OO'} + d_t^R \boldsymbol{O'M} \end{aligned}$$

Définition 1.4. Vitesse absolue
La vitesse absolue $\boldsymbol{v}$ du corps (M) dans le référentiel R a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &\triangleq d_t^R \boldsymbol{OM} \\ &= d_t^R (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Définition 1.5. Vitesse relative des référentiels
La vitesse relative du référentiel R' vu de R a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &\triangleq d_t^R \boldsymbol{OO'} \\ &= d_t^R (x_{O'}\boldsymbol{i} + y_{O'}\boldsymbol{j} + z_{O'}\boldsymbol{k}) \\ &= \dot{x}_{O'}\boldsymbol{i} + \dot{y}_{O'}\boldsymbol{j} + \dot{z}_{O'}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

La vitesse relative du référentiel R vu de R' a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}' &\triangleq d_t^{R'} \boldsymbol{O'O} \\ &= d_t^{R'} (x'_O\boldsymbol{i}' + y'_O\boldsymbol{j}' + z'_O\boldsymbol{k}') \\ &= \dot{x}'_O\boldsymbol{i}' + \dot{y}'_O\boldsymbol{j}' + \dot{z}'_O\boldsymbol{k}' \end{aligned}$$

En général, $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{V}'$. En effet, supposons que vu de R, le référentiel R' ne fasse que tourner sur lui-même. Alors, vu de R', le référentiel R décrit un cercle autour de R'. Leurs vitesses relatives respectives sont donc différentes. En se servant de ces définitions, nous avons :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + d_t^R \boldsymbol{O'M} \tag{2}$$

Vu du référentiel R, les vecteurs de base du référentiel R' varient dans le temps. Le dernier terme du membre de droite a pour expression :

$$\begin{aligned} d_t^R \boldsymbol{O'M} &= d_t^R (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') \\ &= \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' + x' d_t^R \boldsymbol{i}' + y' d_t^R \boldsymbol{j}' + z' d_t^R \boldsymbol{k}' \end{aligned}$$

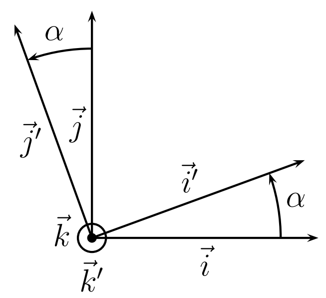
Définition 1.6. Vitesse relative
La vitesse relative $\boldsymbol{v}'$ du corps (M) dans le référentiel R' a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &\triangleq d_t^{R'} \boldsymbol{O'M} \\ &= d_t^{R'} (x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') \\ &= \dot{x}'\boldsymbol{i}' + \dot{y}'\boldsymbol{j}' + \dot{z}'\boldsymbol{k}' \end{aligned}$$

Avec cette définition :

$$d_t^R \boldsymbol{O'M} = \boldsymbol{v}' + x' d_t^R \boldsymbol{i}' + y' d_t^R \boldsymbol{j}' + z' d_t^R \boldsymbol{k}' \tag{3}$$

On suppose que les axes Oz et $O'z'$ ont même direction et même sens, de sorte que $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}'$ soient équipollents. Appelons $\alpha(t)$ l'angle orienté de R vers R', qui est l'angle de rotation de R' dans R à l'instant t.



Nous avons les relations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \sin\alpha \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}' = -\sin\alpha \boldsymbol{i} + \cos\alpha \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} d_t^R \boldsymbol{i'} = -\dot{\alpha} \sin \alpha \boldsymbol{i} + \dot{\alpha} \cos \alpha \boldsymbol{j} \\ \qquad\;\; = \dot{\alpha} \boldsymbol{j'} \\ d_t^R \boldsymbol{j'} = -\dot{\alpha} \cos \alpha \boldsymbol{i} - \dot{\alpha} \sin \alpha \boldsymbol{j} \\ \qquad\;\; = -\dot{\alpha} \boldsymbol{i'} \\ d_t^R \boldsymbol{k'} = d_t^R \boldsymbol{k} \\ \qquad\;\; = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{5}$$

par conséquent, la relation (3) s'écrit :

$$\begin{aligned} d_t^R \boldsymbol{O'M} &= \boldsymbol{v'} + x'\dot{\alpha} \boldsymbol{j'} - y'\dot{\alpha} \boldsymbol{i'} \\ &= \boldsymbol{v'} + \dot{\alpha}(x' \boldsymbol{j'} - y' \boldsymbol{i'}) \end{aligned} \tag{6}$$

Définition 1.7. Vecteur vitesse angulaire relative
Le vecteur vitesse angulaire de R' par rapport à R a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &\triangleq d_t^R \alpha \boldsymbol{k} \\ &= \dot{\alpha} \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Appelons $\alpha'(t)$ l'angle orienté de R' vers R, qui est l'angle de rotation de R dans R' à l'instant t, et tel que $\alpha' = -\alpha$. Le vecteur vitesse angulaire de R par rapport à R' a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega'} &\triangleq d_t^{R'} \alpha' \boldsymbol{k'} \\ &= \dot{\alpha}' \boldsymbol{k'} \\ &= -\dot{\alpha} \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de (6) est le produit vectoriel $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}$. En effet,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times z' - \dot{\alpha} y' \\ \dot{\alpha} x' - 0 \times z' \\ 0 \times y' - 0 \times x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} y' \\ \dot{\alpha} x' \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\alpha}(x' \boldsymbol{j'} - y' \boldsymbol{i'}) \end{aligned}$$

si bien que la relation (3) s'écrit :

$$d_t^R \boldsymbol{O'M} = d_t^{R'} \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M} \tag{7}$$

$$= \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M} \tag{8}$$

Avec ce résultat, la loi de composition des vitesses (2) s'écrit :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}$$

□

Remarque. On peut obtenir ce résultat en utilisant une démonstration purement algébrique :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}' &= 1 \\
d_t^R(\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}') &= 0 \\
\boldsymbol{i}' \cdot d_t^R\boldsymbol{i}' + d_t^R\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}' &= 0 \\
2\left(\boldsymbol{i}' \cdot d_t^R\boldsymbol{i}'\right) &= 0 \\
d_t^R\boldsymbol{i}' &\perp \boldsymbol{i}' \\
d_t^R\boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}'
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est un vecteur pour l'instant indéterminé.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j}' &= 0 \\
d_t^R(\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j}') &= 0 \\
\boldsymbol{i}' \cdot d_t^R\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{j}' \cdot d_t^R\boldsymbol{i}' &= 0 \\
\boldsymbol{i}' \cdot d_t^R\boldsymbol{j}' &= -\boldsymbol{j}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}')
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 5.1 donné en annexe :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' \cdot d_t^R\boldsymbol{j}' &= -\boldsymbol{i}' \cdot (\boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{\omega}) \\
&= \boldsymbol{i}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}') \\
d_t^R\boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}'
\end{aligned}$$

De même pour le vecteur $\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k}' &= 0 \\
d_t^R\boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'
\end{aligned}$$

En posant $\boldsymbol{k}'$ comme axe de rotation,

$$\begin{aligned}
d_t^R\boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

soit,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}'$$

En appliquant ces résultats à la relation (3), puis à la relation (2), nous obtenons la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}' + x'(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}') \\
&= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}
\end{aligned}$$

Définition 1.8. Vitesse d'entraînement
La vitesse d'entraînement est la vitesse du point P fixe dans le référentiel mobile R', coïncidant avec le point M à un instant t_0 :

$$\boldsymbol{v}_e \triangleq \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'P}$$

A l'instant t_0, les points P et M étant superposés, nous avons :

$$\boldsymbol{V}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times \boldsymbol{O'P}(t_0) = \boldsymbol{V}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times \boldsymbol{O'M}(t_0)$$

si bien qu'à l'instant t_0 *uniquement* :

$$\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}'(t_0) + \boldsymbol{v}_e(t_0)$$

Les trajectoires des points P et M étant différentes, sauf si le corps (M) est fixe dans R', nous aurons en général,

$$d_t^R\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'P}\right) \neq d_t^R\left(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}\right)$$

si bien qu'en général,

$$d_t^R\boldsymbol{v} \neq d_t^R\left(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_e\right)$$

2. Accélération dans un référentiel non inertiel

Théorème 2.1. *Par changement de référentiels, les vecteurs accélération du corps (M) sont liés par la relation suivante :*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c \tag{9}$$

appelée loi de composition des accélérations, dans laquelle $\boldsymbol{a}$ est l'accélération du corps (M) dans R, $\boldsymbol{a}'$ est l'accélération du corps (M) dans R', $\boldsymbol{a}_e$ est l'accélération d'entraînement et a_c l'accélération de Coriolis.

Démonstration. Dérivons dans R par rapport au temps, la loi de composition des vitesses (1) :

$$\begin{aligned} d_t^R\boldsymbol{v} &= d_t^R\boldsymbol{V} + d_t^R\boldsymbol{v}' + d_t^R(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}) \\ &= d_t^R\boldsymbol{V} + d_t^R\boldsymbol{v}' + d_t^R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times d_t^R\boldsymbol{O'M} \end{aligned}$$

Définition 2.1. Accélération absolue
L'accélération absolue $\boldsymbol{a}$ du corps (M) dans le référentiel R a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &\triangleq d_t^R\left(d_t^R\boldsymbol{OM}\right) \\ &= d_t^R\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Définition 2.2. Accélération relative des référentiels
L'accélération relative de R' vu de R a pour expression :

$$\boldsymbol{A} \triangleq d_t^R\boldsymbol{V}$$

Avec ces définitions :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + d_t^R \boldsymbol{v'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times d_t^R \boldsymbol{O'M}$$

En utilisant la relation (8), nous avons :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + d_t^R \boldsymbol{v'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}) \tag{10}$$

La relation (7) s'applique à tout vecteur exprimé dans R' et dérivé dans R. Appliquée au vecteur $\boldsymbol{v'}$, elle donne :

$$d_t^R \boldsymbol{v'} = d_t^{R'} \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v'}$$

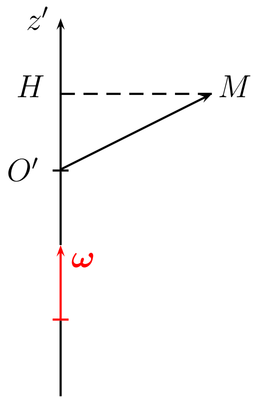
Définition 2.3. Accélération relative
L'accélération relative est l'accélération du point M dans le référentiel R' :

$$\boldsymbol{a'} \triangleq d_t^{R'} \boldsymbol{v'}$$

La relation (10) devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{A} + d_t^{R'} \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}) \\ &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v'} \end{aligned} \tag{11}$$

Soit H la projection orthogonale du point M sur l'axe de rotation $O'z'$ du repère R' par rapport au repère R :



En utilisant le théorème 5.2 donné en annexe, le dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'M}) &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{O'M}) - \boldsymbol{O'M}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega}(\omega\, O'H) - \boldsymbol{O'M}\, \omega^2 \\ &= \boldsymbol{O'H}\, \omega^2 - \boldsymbol{O'M}\, \omega^2 \\ &= \boldsymbol{MH}\, \omega^2 \end{aligned}$$

Ce terme, toujours dirigée vers le centre de rotation instantané, s'appelle accélération centripète. La relation (11) s'écrit :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a'} + \boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{MH}\omega^2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v'} \tag{12}$$

Définition 2.4. Accélération d'entraînement
L'accélération d'entraînement est l'accélération du point P fixe dans le référentiel R', coïncidant avec le point M à l'instant t_0 :

$$\boldsymbol{a}_e \triangleq \boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'P} + \boldsymbol{PH}\,\omega^2$$

A l'instant t_0, les points P et M étant superposés, nous avons :

$$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{MH}\,\omega^2$$

Définition 2.5. Accélération de Coriolis
L'accélération de Coriolis a pour expression,

$$\boldsymbol{a}_c \triangleq 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

Avec les définitions 2.4 et 2.5, la relation (12) s'écrit :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c \tag{13}$$

□

Remarque. La dérivée dans R de la vitesse d'entraînement donne l'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} d_t^R \boldsymbol{v}_e &= d_t^R \boldsymbol{V} + d_t^R(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'P}) \\ &= \boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'P} + \boldsymbol{\omega} \times d_t^R \boldsymbol{O'P} \end{aligned}$$

En utilisant (7) puis le théorème 5.2 :

$$\begin{aligned} d_t^R \boldsymbol{v}_e &= \boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{O'P} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'P}) \\ &= \boldsymbol{a}_e \end{aligned}$$

3. Forces dans un référentiel non inertiel

Théorème 3.1. *Soient $\sum \boldsymbol{F}^{\,ext}$ la somme des modèles des forces extérieures s'exerçant sur un système. La relation fondamentale de la dynamique*[1] *dans le référentiel non inertiel R' s'écrit :*

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,ext} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c = \frac{d\boldsymbol{p}'}{dt}$$

et, lorsque la masse du système est constante :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,ext} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c = m\boldsymbol{a}'$$

Démonstration. Soit m la masse du corps (M), supposée constante. La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel inertiel R s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F}^{\,ext} &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ &= m\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

1. Voir Mécanique classique.pdf.

Avec la relation (13) nous avons :

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F}^{\,ext} &= m(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c) \\ &= m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_e + m\boldsymbol{a}_c\end{aligned}$$

Définition 3.1. Force d'inertie d'entraînement
La force d'inertie d'entraînement a pour expression :

$$\boldsymbol{F}_e \triangleq -m\boldsymbol{a}_e$$

Définition 3.2. Force de Coriolis
La force de Coriolis a pour expression :

$$\boldsymbol{F}_c \triangleq -m\boldsymbol{a}_c$$

Par conséquent, on a bien :

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,ext} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c = m\boldsymbol{a}'$$

Dans le référentiel non inertiel R', il faut ajouter aux forces extérieures réelles $\boldsymbol{F}^{\,ext}$ s'exerçant sur le système, les forces fictives d'entraînement $\boldsymbol{F}_e$ et de Coriolis $\boldsymbol{F}_c$. Ces forces sont dite fictives car elles ne créent pas le mouvement. Elles ne sont dues qu'au mouvement de l'observateur. □

4. Exemple de force fictive : la force centrifuge

Soit un corps (M) de masse m, tenu par un fil et tournant avec la vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe Oz d'un référentiel d'inertie R. On considère le référentiel R' de même centre O que R, dont l'axe Oz' est confondu avec l'axe Oz. Ce référentiel tourne autour de cet axe à la même vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ que le corps (M), de sorte que celui-ci soit immobile dans R' et soit toujours sur l'axe Ox' : $\boldsymbol{OM} = x'\boldsymbol{i}'$

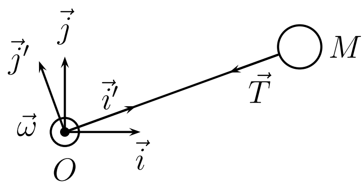


Figure 1. Rotation du corps M (vue de dessus)

4.1. **Dans le référentiel inertiel.**
La vitesse $\boldsymbol{v}'$ du corps (M) dans R' étant nulle, l'accélération $\boldsymbol{a}'$ du corps (M) dans R' est nulle elle aussi, ainsi que l'accélération de Coriolis $\boldsymbol{a}_c$. L'accélération relative $\boldsymbol{A}$ des deux référentiels est nulle par hypothèse, ainsi que la variation de la vitesse angulaire $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Dans la relation (12) il ne reste que l'accélération centripète :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{MO}\,\omega^2 \\ &= -\omega^2 r\boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

où $r\boldsymbol{e}_r$ est le rayon vecteur $\boldsymbol{OM}$ en coordonnées polaires. La relation fondamentale de la dynamique nous donne l'expression de la tension du fil :

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F}^{\,ext} &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ \boldsymbol{T} &= m\boldsymbol{a} \\ &= -m\omega^2 r\boldsymbol{e}_r \end{aligned}$$

4.2. **Dans le référentiel non inertiel.**
Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique pour un observateur dans le référentiel R' :

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{F}^{\,ext} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_c &= m\boldsymbol{a}' \\ \sum \boldsymbol{F}^{\,ext} + m\omega^2 r\boldsymbol{e}_r &= m\boldsymbol{a}' \end{aligned}$$

Définition 4.1. Force centrifuge
La force centrifuge a pour expression :

$$\boldsymbol{F}_n \triangleq m\omega^2 r\boldsymbol{e}_r$$

Le corps (M) étant immobile dans R', son accélération est nulle :

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}$$

Dans R', la force centrifuge $\boldsymbol{F}_n$ s'exerce sur tous les corps, en plus des forces réelles $\boldsymbol{F}$. La seule force réelle $\boldsymbol{F}$ est ici la tension $\boldsymbol{T}$ du fil.

5. Annexe

Théorème 5.1.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix} \\
&= A_x(B_yC_z - B_zC_y) \\
&\quad + A_y(B_zC_x - B_xC_z) \\
&\qquad + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\
&= C_x(A_yB_z - A_zB_y) \\
&\quad + C_y(A_zB_x - A_xB_z) \\
&\qquad + C_z(A_xB_y - A_yB_x) \\
&= \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})
\end{aligned}$$

□

Théorème 5.2.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z) \\ A_z(B_yC_z - B_zC_y) - A_x(B_xC_y - B_yC_x) \\ A_x(B_zC_x - B_xC_z) - A_y(B_yC_z - B_zC_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_yB_xC_y - A_yB_yC_x - A_zB_zC_x + A_zB_xC_z \\ A_zB_yC_z - A_zB_zC_y - A_x(B_xC_y + A_xB_yC_x) \\ A_xB_zC_x - A_xB_xC_z - A_y(B_yC_z + A_yB_zC_y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \\
&\quad = \mathbf{B}(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \mathbf{C}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\
&\quad = \begin{pmatrix} B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} B_xA_yC_y + B_xA_zC_z - C_xA_yB_y - C_xA_zB_z) \\ B_yA_xC_x + B_yA_zC_z - C_yA_xB_x - C_yA_zB_z \\ B_zA_xC_x + B_zA_yC_y - C_zA_xB_x - C_zA_yB_y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/