LE PROBLÈME DE KEPLER

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Il s'agit de déterminer l'équation de l'orbite d'une planète à partir de la mécanique de Newton, en ne considérant que la seule force de gravitation, en négligeant l'interaction gravitationnelle des planètes entre elles, et en supposant les astres ponctuels. Ce problème est aussi connu sous le nom de « problème des deux corps ».

TABLE DES MATIÈRES

Date: 24 avril 2017.

1. Coordonnées polaires

1.1. Expression des vecteurs de base de la base polaire.

Etant donné que l'on traite ici de la révolution d'une planète autour du Soleil, il est avantageux de passer en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). L'axe des z étant le même en coordonnées cylindriques et en coordonnées rectangulaires (x, y, z), on ne s'intéresse ici qu'aux coordonnées polaires (ρ, θ) prises dans le plan (x, y).

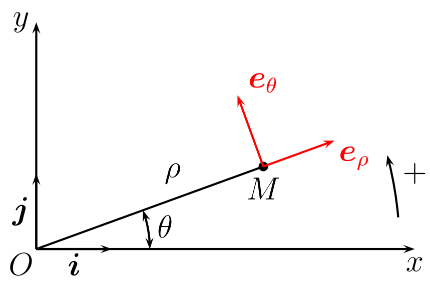

Figure 1. Vecteurs de la base polaire comobile

Première méthode.
En se servant de la figure 1, nous pouvons exprimer les vecteurs de la base polaire en fonction de ceux de la base cartésienne :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j} \end{cases}$$

Deuxième méthode.
Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires(ρ, θ). Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Nous pouvons déterminer les vecteurs de base $\boldsymbol{e}_\rho$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ en différenciant le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ exprimé dans la base cartésienne $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ en fonction des coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(x, y) &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r}(\rho, \theta) &= \rho\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \rho\sin\theta\, \boldsymbol{j} \\ d\boldsymbol{r}(\rho, \theta) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right)_\theta d\rho + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right)_\rho d\theta \\ &= (\cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j})d\rho + \rho(-\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j})d\theta \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires de la base polaire ont alors pour expression :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j} \end{cases}$$

et l'on a :

$$d\boldsymbol{r}(\rho, \theta) = \boldsymbol{e}_\rho \, d\rho + \rho \boldsymbol{e}_\theta \, d\theta$$

1.2. **Expression du vecteur position.**
Dans la base polaire $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ et en coordonnées polaires (ρ, θ), le vecteur position s'écrit :

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho$$

1.3. **Dérivée des vecteurs de base.**
Nous avons besoin de la dérivée des vecteurs de base pour exprimer la vitesse et l'accélération :

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{e}_\rho}{dt} = -\sin\theta \, \dfrac{d\theta}{dt} \, \boldsymbol{i} + \cos\theta \, \dfrac{d\theta}{dt} \, \boldsymbol{j} \\ \dfrac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \, \dfrac{d\theta}{dt} \, \boldsymbol{i} - \sin\theta \, \dfrac{d\theta}{dt} \, \boldsymbol{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta} \boldsymbol{e}_\rho \end{cases}$$

1.4. **Expression du vecteur vitesse.**
Le vecteur vitesse est la dérivée première du vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\rho \boldsymbol{e}_\rho\right) \\ &= \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\boldsymbol{e}}_\rho \\ &= \dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

1.5. **Expression du vecteur accélération.**
Le vecteur accélération est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= \ddot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + \rho \dot{\theta} \dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \ddot{\rho} \boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta + \rho \ddot{\theta} \boldsymbol{e}_\theta - \rho \dot{\theta}^2 \boldsymbol{e}_\rho \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2\right) \boldsymbol{e}_\rho + \left(2 \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}\right) \boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

2. Relation fondamentale de la dynamique

2.1. Centre d'inertie.

Le système formé par deux astres en interaction gravitationnelle est isolé, on néglige les interactions avec l'extérieur. Soient m la masse de la planète, M celle du Soleil, $\boldsymbol{OP}$ le rayon vecteur de la planète et $\boldsymbol{OS}$ celui du Soleil. Dans un référentiel galiléen de centre O quelconque, il y a conservation de la quantité de mouvement totale du système :

$$\forall O, \quad m\,\frac{d\boldsymbol{OP}}{dt} + M\,\frac{d\boldsymbol{OS}}{dt} = \boldsymbol{C}^{ste}$$

Nous pouvons toujours nous placer dans le *référentiel de centre de masse* dans lequel la quantité de mouvement totale du système est nulle. Soit G le centre de ce référentiel galiléen, appelé *centre de masse* ou *centre d'inertie*, tel que :

$$m\,\frac{d\boldsymbol{GP}}{dt} + M\,\frac{d\boldsymbol{GS}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

Or,

$$\begin{aligned}
m\,\frac{d\boldsymbol{OP}}{dt} + M\,\frac{d\boldsymbol{OS}}{dt} &= m\,\frac{d(\boldsymbol{OG}+\boldsymbol{GP})}{dt} + M\,\frac{d(\boldsymbol{OG}+\boldsymbol{GS})}{dt} \\
&= (m+M)\,\frac{d\boldsymbol{OG}}{dt} + m\,\frac{d\boldsymbol{GP}}{dt} + M\,\frac{d\boldsymbol{GS}}{dt} \\
&= (m+M)\,\frac{d\boldsymbol{OG}}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{OG}}{dt} &= \frac{1}{m+M}\left(m\,\frac{d\boldsymbol{OP}}{dt} + M\,\frac{d\boldsymbol{OS}}{dt}\right) \\
\boldsymbol{OG} &= \frac{m\,\boldsymbol{OP} + M\,\boldsymbol{OS}}{m+M}
\end{aligned}$$

Cette relation permet de situer le centre d'inertie. En prenant le point O en G nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{m\,\boldsymbol{GP} + M\,\boldsymbol{GS}}{m+M} &= \boldsymbol{GG} \\
m\,\boldsymbol{GP} + M\,\boldsymbol{GS} &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

En notant $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{GP}$ et $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{GS}$:

$$\begin{aligned}
m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2 &= 0 \\
\boldsymbol{r}_2 &= -\frac{m}{M}\,\boldsymbol{r}_1
\end{aligned}$$

Le centre d'inertie se trouve donc sur le segment de droite $[SP]$ qui relie les deux astres.

2.2. **Masse réduite.**
Plaçons nous dans le référentiel galiléen ayant pour centre le centre d'inertie G du système planète-Soleil. Déterminons les rayons vecteur $\boldsymbol{GP}$ et $\boldsymbol{GS}$ de la planète et du Soleil en fonction des données du problème, c'est à dire en fonction du rayon vecteur Soleil - planète $\boldsymbol{SP}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{SP} &= \boldsymbol{SG} + \boldsymbol{GP}\\ &= \boldsymbol{GP} - \boldsymbol{GS}\end{aligned}$$

En notant $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{SP}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\\ &= \boldsymbol{r}_1 + \frac{m}{M}\,\boldsymbol{r}_1\\ &= \frac{m+M}{M}\,\boldsymbol{r}_1\end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_1 = \dfrac{M}{m+M}\,\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{r}_2 = -\dfrac{m}{m+M}\,\boldsymbol{r}\end{cases}\tag{1}$$

Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen de centre G, la planète étant le système étudié :

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F}^{ext} &= m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}\\ &= \frac{mM}{m+M}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\\ &= \mu\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

où μ est la *masse réduite*. Cette équation coïncide formellement avec celle d'un point matériel de masse μ en mouvement sous l'action de forces extérieures, ayant $\boldsymbol{r}$ pour rayon vecteur. Nous pouvons donc passer de la variable $\boldsymbol{r}_1$ à la variable $\boldsymbol{r}$ à condition d'utiliser la masse réduite. Dans ce cas, les trajectoires $\boldsymbol{r}_1(t)$ et $\boldsymbol{r}_2(t)$ s'obtiennent ensuite avec les formules (1).

2.3. **Loi des aires.**

Première méthode.
Par symétrie du problème et isotropie de l'espace, chaque force attractive exercée par un astre sur l'autre est dirigée suivant la droite passant par les deux astres, vers le centre d'inertie du système. Si l'on se place dans le référentiel de centre de masse, le centre d'inertie est un point fixe. Chaque force étant constamment dirigée vers ce centre fixe, le problème est dit à *force centrale*. Dans ce référentiel, les forces n'ont de

composante que selon le vecteur $\boldsymbol{e}_\rho$, et le mouvement est donc plan. Par exemple pour la planète (les équations sont similaires pour le Soleil),

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F}^{ext} &= m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}\\ F\boldsymbol{e}_\rho &= m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho + m\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right) = F & (2)\\ 2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta} = 0 & (3)\end{cases}$$

Si l'on ne considère pour le moment que la seconde relation :

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta} &= 0\\ 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta} &= 0\\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) &= 0\\ \rho^2\dot{\theta} &= C \end{aligned} \tag{4}$$

Cette égalité, valable pour toute force centrale et pas seulement pour la force gravitationnelle, s'appelle *loi des aires*, et C est appelée *constante des aires*. Nous verrons en effet que selon la *première loi de Kepler*, l'orbite des planètes est une ellipse dont le centre de gravité G du système planète-Soleil occupe l'un des foyer. La constante des aires est alors égale au double de l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur de la planète, ce qui justifie son nom.

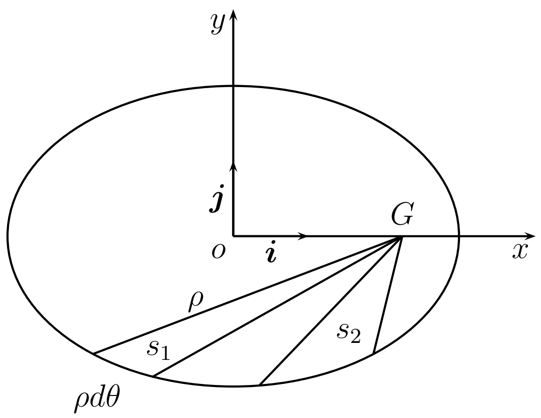

FIGURE 2. Aires balayées en des temps égaux

Soit $d\mathcal{A}$ l'aire infinitésimale balayée par le rayon ρ d'une planète en un intervalle de temps infinitésimal dt. Cette aire est égale au demi-rectangle de côtés ρ et $\rho d\theta$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}\,\rho \times \rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\,\rho^2 d\theta \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \tfrac{1}{2}\,\rho^2 \dot{\theta} \\ &= \tfrac{1}{2}\,C \\ \int_0^s d\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}\,C \int_0^\tau dt \\ s &= \tfrac{1}{2}\,C\tau \end{aligned}$$

Les aires s_1 et s_2 de la figure 2 balayées en des temps égaux sont égales. On peut énoncer la *deuxième loi de Kepler* : le rayon vecteur d'une planète balaye des surfaces d'aires égales en des temps égaux. En une période T, le rayon vecteur parcours la surface totale[1], d'aire $\pi\, ab$, de l'ellipse :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi ab} d\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}\,C \int_0^T dt \\ C &= \frac{2\pi ab}{T} \end{aligned} \tag{5}$$

En introduisant la pulsation ω, telle que $\omega = 2\pi/T$,

$$C = \omega\, ab$$

Deuxième méthode.
Le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}$ de chaque astre s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \\ &= \rho\boldsymbol{e}_\rho \times m(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m\rho^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces exercées sur cet astre[2] :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \rho\boldsymbol{e}_\rho \times F\boldsymbol{e}_\rho \\ &= 0 \end{aligned}$$

1. Voir Ellipse.pdf
2. Voir Mecanique classique.pdf

Le moment cinétique est donc constant :

$$m\rho^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{C}$$
$$\rho^2\dot{\theta} = C$$

La trajectoire de chaque astre est donc une courbe plane, dont le plan est perpendiculaire au vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}$ constant, et contient les vecteurs $\boldsymbol{e}_\rho$ et $\boldsymbol{e}_\theta$.

Nous pouvons nous servir de la constante des aires ou de la norme du moment cinétique pour réécrire la relation (2) :

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\theta}^2 + F \\ &= \frac{L^2}{m\rho^3} + F \end{aligned}$$

Si la force F est conservative, c'est à dire si elle dérive d'une énergie potentielle E_p, alors :

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= \frac{L^2}{m\rho^3} - \frac{dE_p(\rho)}{d\rho} \\ &= -\frac{d}{d\rho}\left(\frac{L^2}{2m\rho^2} + E_p(\rho)\right) \end{aligned}$$

Le mouvement radial est similaire à un mouvement à une dimension (avec $\rho > 0$) dans un potentiel $L^2/(2m\rho^2) + E_p$. Ce potentiel est appelé *potentiel effectif* :

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + E_p(\rho)$$

3. Force de gravitation

Reprenons la relation (2) :

$$F = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)$$

où ρ désigne ici la distance de l'astre au centre d'inertie. Nous pouvons utiliser la distance entre les deux astres à condition d'utiliser la masse réduite :

$$F = \mu\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)$$

où ρ désigne maintenant la distance entre les deux astres. Le modèle de force pour la force de gravitation est en raison inverse du carré de la distance des deux astres. Soit $\mathcal{G}$ la constante de gravitation,

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho^2}\,\boldsymbol{e}_\rho &= \frac{mM}{m+M}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e}_\rho \\ -\mathcal{G}\,\frac{m+M}{\rho^2} &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho^2\ddot{\rho} - \rho^3\dot{\theta}^2 &= -\mathcal{G}(m+M) \end{aligned} \tag{6}$$

Cette équation différentielle du second ordre par rapport au temps est difficile à intégrer. En raisonnant sur l'énergie plutôt que sur les forces, nous obtiendrons la même équation différentielle intégrée une première fois par rapport au temps. En effet, la relation fondamentale de la dynamique est équivalente à la conservation de l'énergie mécanique lorsque les forces dérivent d'un potentiel[3]. Le théorème de l'énergie cinétique permet alors de travailler sur la vitesse, par l'intermédiaire de l'énergie cinétique, plutôt que sur l'accélération.

4. Conservation de l'énergie mécanique

Cherchons le potentiel de la force gravitationnelle exercée sur une planète, autrement dit l'énergie potentielle E_p de cette planète :

$$\begin{aligned}-\mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho^2}\,\boldsymbol{e}_\rho &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p\\ &= -\frac{\partial E_p}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho\\ &= -\frac{dE_p}{d\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho\end{aligned}$$

Seule une différence d'énergie potentielle intervient si bien qu'elle est toujours définie à une constante additive près, que l'on ajoute puis que l'on soustrait. Ajuster la valeur de cette constante nous permet de définir le zéro de l'énergie potentielle où cela nous convient le mieux. En annulant l'énergie potentielle à l'infini, nous avons :

$$\begin{aligned}dE_p &= \mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho^2}\,d\rho\\ \int_0^{E_p} dE_p &= \mathcal{G}mM\int_{+\infty}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2}\\ [E_p]_0^{E_p} &= -\mathcal{G}mM\left[\frac{1}{\rho}\right]_{+\infty}^{\rho}\\ E_p &= -\mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho}\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi raisonner sur la constante d'intégration :

$$\begin{aligned}\int dE_p &= \mathcal{G}mM\int\frac{d\rho}{\rho^2}\\ E_p &= -\mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho} + C^{ste}\end{aligned}$$

Prendre une constante nulle revient à poser $E_p = 0$ en $\rho = +\infty$.

3. Voir Mecanique classique.pdf

Ecrivons maintenant l'expression de l'énergie cinétique E_c :

$$\begin{aligned} E_c &= \tfrac{1}{2}\mu\|\boldsymbol{v}\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi prendre le potentiel effectif,

$$\begin{aligned} V_{eff}(\rho) &= \frac{L^2(\mu)}{2\mu\rho^2} + E_p(\rho) \\ &= \tfrac{1}{2}\mu\rho^2\dot{\theta}^2 + E_p(\rho) \end{aligned}$$

et l'énergie cinétique :

$$E_c = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2$$

La conservation de l'énergie mécanique E nous donne l'équation différentielle du mouvement intégrée une première fois :

$$\begin{aligned} E_c + E_p &= E \\ \frac{mM}{2(m+M)}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) - \mathcal{G}\,\frac{mM}{\rho} &= E \\ \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} &= \frac{2E}{\mu} \end{aligned} \tag{7}$$

qui est du premier ordre par rapport au temps.

En la dérviant par rapport au temps, on vérifie qu'elle redonne l'équation différentielle (6) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{2E}{\mu}\right) \\ 2\dot{\rho}\ddot{\rho} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}^2 + 2\rho^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\mathcal{G}(m+M)\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} &= 0 \end{aligned}$$

En dérivant la constante des aires, nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) &= \frac{d}{dt}C \\ 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \rho^2\ddot{\theta} \times 2\dot{\theta} &= -2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} \times 2\dot{\theta} \\ 2\rho^2\dot{\theta}\ddot{\theta} &= -4\rho\dot{\rho}\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}\ddot{\rho} - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}^2 + 2\mathcal{G}(m+M)\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} &= 0 \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 + \mathcal{G}(m+M)\frac{1}{\rho^2} &= 0 \\ \rho^2\ddot{\rho} - \rho^3\dot{\theta}^2 &= -\mathcal{G}(m+M) \end{aligned}$$

5. Résolution de l'équation différentielle du mouvement

Revenons à la résolution de l'équation différentielle (7) :

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} = \frac{2E}{\mu}$$

Si nous voulons l'équation de la trajectoire de la forme $\rho = f(\theta)$, le temps n'intervient pas. Pour supprimer le temps dans l'équation différentielle (7) nous utilisons la constante des aires (4) :

$$\begin{aligned} \rho^2\frac{d\theta}{dt} &= C \\ dt &= \frac{\rho^2 d\theta}{C} \end{aligned} \tag{8}$$

Le premier terme $\dot{\rho}^2$ de l'équation différentielle (7) se transforme comme ceci :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 &= \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \\ &= C^2\left(\frac{d\rho}{\rho^2 d\theta}\right)^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left(\rho^{-1}\right) &= -\rho^{-2}\frac{d\rho}{d\theta} \\ \frac{d(1/\rho)}{d\theta} &= -\frac{d\rho}{\rho^2 d\theta} \end{aligned}$$

donc,

$$\dot{\rho}^2 = C^2\left[\frac{d(1/\rho)}{d\theta}\right]^2$$

Les deux termes suivants se transforment comme ceci :

$$\begin{aligned} \rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} &= \frac{C^2}{\rho^2} - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} \\ &= \left[\frac{C}{\rho} - \frac{\mathcal{G}(m+M)}{C}\right]^2 - \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C}\right]^2 \end{aligned}$$

L'équation différentielle (7) s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} C^2\left[\frac{d(1/\rho)}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{C}{\rho} - \frac{\mathcal{G}(m+M)}{C}\right]^2 &= \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C}\right]^2 + \frac{2E}{\mu} \\ \left[\frac{d(1/\rho)}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} - \frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 &= \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2} \end{aligned}$$

Nous n'avons plus que des termes en $1/\rho$. Effectuons un premier changement de variable pour travailler avec l'inverse de la variable ρ :

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\rho}$$

Avec la variable r, l'équation différentielle (7) s'écrit :

$$\left[\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}\right]^2 + \left[\mathrm{r} - \frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 = \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}$$

Effectuons un deuxième changement de variable pour s'affranchir de la constante additive sur la variable r :

$$\mathsf{r} = \mathrm{r} - \frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}$$

pour lequel,

$$\frac{d\mathsf{r}}{d\theta} = \frac{d\mathrm{r}}{d\theta}$$

Avec la variable r l'équation différentielle (7) s'écrit :

$$\left(\frac{d\mathsf{r}}{d\theta}\right)^2 + \mathsf{r}^2 = \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}$$

Effectuons un troisième et dernier changement de variable :

$$r = \frac{\mathsf{r}}{\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}}}$$

d'où,

$$\mathsf{r} = r\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}}$$

$$\mathsf{r}^2 = r^2\left\{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}\right\}$$

et,

$$\frac{d\mathsf{r}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}}$$

$$\left(\frac{d\mathsf{r}}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left\{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}\right\}$$

Avec la variable r l'équation différentielle (7) s'écrit :

$$\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\left\{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}\right\} = \left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}$$

ce qui donne,

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = 1 \tag{9}$$

Première méthode de résolution.

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \pm(1-r^2)^{1/2}\\ d\theta &= \pm\frac{dr}{(1-r^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

Lorsque le signe est positif, cette équation s'intègre en arcosinus plus un angle constant ϕ :

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos(r) + \phi\\ r &= \cos(\theta-\phi)\end{aligned}$$

Lorsque le signe est négatif, cette équation s'intègre en arcsinus plus un angle constant β :

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin(r) + \beta\\ r &= \sin(\theta-\beta)\end{aligned}$$

Pour $\beta = \phi - \pi/2$,

$$\begin{aligned}r &= \sin(\theta-\phi+\pi/2)\\ &= \cos(\theta-\phi)\end{aligned}$$

Les solutions étant identiques, on conserve $r = \cos(\theta-\phi)$.

Deuxième méthode de résolution.
Dérivons par rapport à θ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] &= 0\\ 2\,\frac{dr}{d\theta}\,\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\,r\,\frac{dr}{d\theta} &= 0\\ \frac{d^2r}{d\theta^2} + r &= 0\end{aligned}$$

d'où :

$$r = \cos(\theta-\phi)$$

Revenons à la variable ρ :

$$\begin{aligned}
r &= \cos(\theta-\phi)\\
\frac{\mathrm{r}}{\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2+\frac{2E}{\mu C^2}}} &= \cos(\theta-\phi)\\
\frac{\mathrm{r}-\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}}{\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2+\frac{2E}{\mu C^2}}} &= \cos(\theta-\phi)\\
\frac{\frac{1}{\rho}-\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}}{\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2+\frac{2E}{\mu C^2}}} &= \cos(\theta-\phi)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2+\frac{2E}{\mu C^2}}\,\cos(\theta-\phi)+\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}$$

On pose p le *paramètre* de l'ellipse, tel que :

$$p=\frac{C^2}{\mathcal{G}(m+M)} \tag{10}$$

et e *l'excentricité* de l'ellipse, telle que :

$$e=\frac{C^2}{\mathcal{G}(m+M)}\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2+\frac{2E}{\mu C^2}} \tag{11}$$

L'équation s'écrit alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \frac{e}{p}\cos(\theta-\phi)+\frac{1}{p}\\
\rho &= \frac{p}{1+e\cos(\theta-\phi)} \qquad (12)
\end{aligned}$$

C'est l'équation polaire d'une conique, intersection d'un cône de révolution avec un plan. L'équation de la trajectoire de la planète s'obtient en effectuant le changement de variable (1) :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{M}{m+M}\,\rho\\
&= \frac{Mp}{(m+M)[1+e\cos(\theta-\phi)]}
\end{aligned}$$

De même, l'équation de la trajectoire du Soleil s'écrit :

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \frac{m}{m+M}\,\rho\\
&= \frac{mp}{(m+M)[1+e\cos(\theta-\phi)]}
\end{aligned}$$

6. La trajectoire

6.1. L'excentricité e.
Remarquons que l'excentricité est positive ou nulle :

$$e = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m+M)}\sqrt{\left[\frac{\mathcal{G}(m+M)}{C^2}\right]^2 + \frac{2E}{\mu C^2}}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{2EC^2}{\mathcal{G}^2 mM(m+M)}} \qquad (13)$$

L'excentricité définit la forme de l'orbite :
Si $E = -\frac{\mathcal{G}^2 mM(m+M)}{2C^2}$ alors $e = 0$ et $\rho = p$: l'orbite est un cercle. Nous voyons que p est le paramètre de taille de l'orbite.
Si $-\frac{\mathcal{G}^2 mM(m+M)}{2C^2} < E < 0$ alors $0 < e < 1$: l'orbite est une ellipse.
Si $E = 0$ alors $e = 1$: l'orbite est une parabole.
Si $E > 0$ alors $e > 1$: l'orbite est une hyperbole.

6.2. L'ellipse.
Pour $0 < e < 1$ et pour $\phi = 0$, l'équation (12) représente dans le repère (F, x, y) l'équation polaire d'une ellipse centrée sur $o(-c, 0)$, et dont le rayon ρ est mesuré depuis l'un des foyers (voir la figure 3).

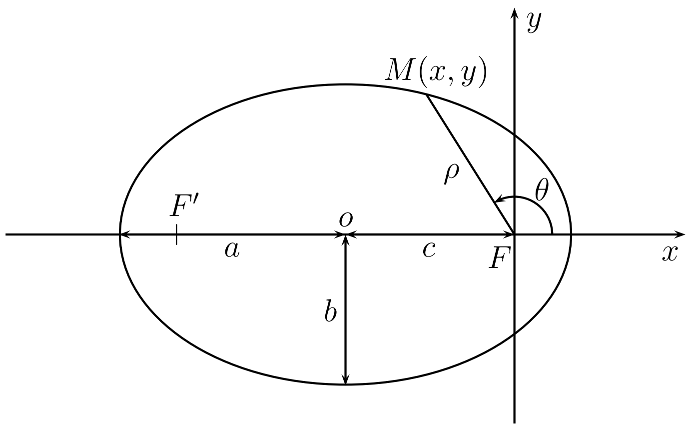

Figure 3. Orbite elliptique

L'angle θ est appelé *anomalie vraie*.

Nous pouvons énoncer la *première loi de Kepler* : les planètes décrivent des ellipses dont le centre de gravité du système planète-Soleil occupe l'un des foyers.

Le couple (p, e) permet de définir une ellipse de manière unique, en précisant sa taille et sa forme. En coordonnées cartésiennes, l'équation d'une ellipse dont le grand axe est sur l'axe des abscisses, est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le couple formé du demi-grand axe a et du demi-petit axe b permet donc aussi de définir parfaitement une ellipse. En étudiant [4] le passage des coordonnées polaires (ρ, θ) vers les coordonnées cartésiennes (x, y) de l'équation d'une même ellipse, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2}{a} & (14) \\ e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} & (15) \end{cases}$$

6.3. **Orientation de l'ellipse.**
Pour

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \phi) &= 1 \\ \theta - \phi &= 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \theta &= \phi + 2k\pi \end{aligned}$$

nous avons,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + e} \\ &= \rho_{min} \end{aligned}$$

nous sommmes au périhélie, point de l'orbite le plus proche du Soleil. Le grand axe de l'ellipse fait donc un angle ϕ avec l'axe des abscisses, choisi arbitrairement comme origine des angles.

Pour

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \phi) &= -1 \\ \theta - \phi &= \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \theta &= \phi + (2k + 1)\pi \end{aligned}$$

nous avons,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 - e} \\ &= \rho_{max} \end{aligned}$$

nous sommes à l'aphélie, point de l'orbite le plus éloigné du Soleil.

4. Voir Ellipse.pdf

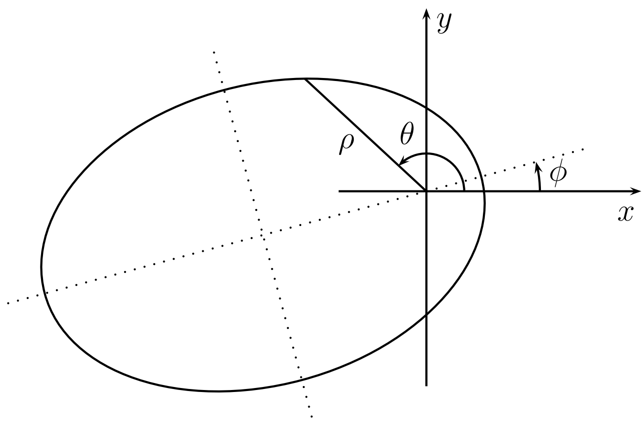

FIGURE 4. Orientation de l'ellipse

6.4. **Le demi-grand axe a.**
Soit $2a$ la longueur du grand axe de l'ellipse :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\rho_{min} + \rho_{max}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) \\ &= \frac{p}{1-e^2} \end{aligned}$$

en utilisant les relations (10) et (13) :

$$\begin{aligned} a &= \frac{C^2}{\mathcal{G}(m+M)} \times \left(-\frac{\mathcal{G}^2 mM(m+M)}{2EC^2}\right) \\ &= -\frac{\mathcal{G}mM}{2E} \end{aligned} \tag{16}$$

On note au passage la relation

$$p = a(1-e^2) \tag{17}$$

Nous pouvons exprimer le rayon minimum en fonction du demi-grand axe a,

$$\begin{aligned}\rho_{min} &= \frac{p}{1+e}\\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e}\\ &= a(1-e)\\ &= a - ae\end{aligned}$$

de même pour le rayon maximum,

$$\begin{aligned}\rho_{max} &= \frac{p}{1-e}\\ &= \frac{a(1-e^2)}{1-e}\\ &= a(1+e)\\ &= a + ae\end{aligned}$$

6.5. **Le demi-petit axe b.**
A partir de la relation (15),

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\\ e^2-1 &= -\frac{b^2}{a^2}\\ b &= a\sqrt{1-e^2}\end{aligned}$$

en utilisant les relations (13) et (16),

$$\begin{aligned}b &= a\sqrt{\frac{-2EC^2}{\mathcal{G}^2 mM(m+M)}}\\ &= aC\sqrt{\frac{1}{a\mathcal{G}(m+M)}}\\ &= C\sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(m+M)}} \qquad (18)\end{aligned}$$

6.6. **La période de révolution T.**
A partir des équations (5) et (18), et des paragraphes 6.4 et 6.5, nous pouvons évaluer la période de révolution en fonction du demi-grand axe a :

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi ab}{C}\\ T^2 &= \frac{4\pi^2\, a^3}{\mathcal{G}(m+M)}\end{aligned}$$

Ceci constitue la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

7. Equations paramétriques

7.1. **L'angle en fonction du temps.**

Les équations paramétriques du temps vont nous permettrent de connaître la position de la planète en fonction du temps.
Cherchons tout d'abord $\theta = \theta(t)$. En utilisant la loi des aires (8) et l'équation de l'orbite (12) :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\rho^2}{C}\,d\theta \\ dt &= \frac{p^2 d\theta}{C[1+e\cos(\theta-\phi)]^2} \\ \int_0^\tau dt &= \frac{p^2}{C}\int_\phi^\vartheta \frac{d\theta}{[1+e\cos(\theta-\phi)]^2} \end{aligned}$$

où l'on a pris comme condition initiale que la planète est au périhélie, c'est à dire $\theta = \phi$ à $t = 0$. Le membre de droite s'intègre en termes de fonctions élémentaires. Le résultat est trouvé grâce au logiciel de calcul formel Maxima. Pour une trajectoire elliptique, $0 < e < 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tau = \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan\left\{\frac{(1-e)\sin(\vartheta-\phi)}{\sqrt{1-e^2}[\cos(\vartheta-\phi)+1]}\right\} \\ - \frac{2e\sin(\vartheta-\phi)}{\frac{(e^3-e^2-e+1)\sin^2(\vartheta-\phi)}{[\cos(\vartheta-\phi)+1]} - (e^3+e^2-e-1)[\cos(\vartheta-\phi)+1]} \end{aligned}$$

Cette relation est trop complexe pour que son inversion, $\theta = \theta(t)$, ne soit possible analytiquement.

7.2. **Le rayon en fonction du temps.**

Cherchons à présent $\rho = \rho(t)$ en revenant à l'équation différentielle (7) :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} &= \frac{2E}{\mu} \\ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{C}{\rho}\right)^2 - \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} &= \frac{2E}{\mu} \\ \frac{d\rho}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{2E}{\mu} + \frac{2\mathcal{G}(m+M)}{\rho} - \left(\frac{C}{\rho}\right)^2} \\ dt &= \frac{\pm\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2E}{\mu}\rho^2 + 2\mathcal{G}(m+M)\rho - C^2}} \end{aligned}$$

A partir des relations (10) et (17), nous avons,

$$\begin{aligned} C^2 &= \mathcal{G}(m+M)p \\ &= \mathcal{G}(m+M)a(1-e^2) \end{aligned}$$

et avec la relation (13) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2EC^2}{\mathcal{G}^2 mM(m+M)} &= e^2 \\ \frac{2E}{mM} &= \frac{(e^2-1)\mathcal{G}^2(m+M)}{C^2} \\ &= \frac{\mathcal{G}^2(m+M)(e^2-1)}{\mathcal{G}(m+M)a(1-e^2)} \\ \frac{2E}{\mu} &= -\frac{\mathcal{G}(m+M)}{a} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\pm\rho d\rho}{\sqrt{-\frac{\mathcal{G}(m+M)\rho^2}{a} + 2\mathcal{G}(m+M)\rho - \mathcal{G}(m+M)a(1-e^2)}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(m+M)}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + 2a\rho - a^2(1-e^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(m+M)}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2e^2-(a-\rho)^2}} \end{aligned} \tag{19}$$

où nous avons avons gardé uniquement le signe positif car dt est positif. Nous avons vu au paragraphe 6.4 que le rayon ρ varie entre $a - ae$ et $a + ae$. Ceci suggère d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\rho = a - ae\cos\psi,\ \ \psi \in [0, \pi] \tag{20}$$

où l'angle ψ est appelé *anomalie excentrique*. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\psi} &= ae\sin\psi \\ d\rho &= ae\sin\psi\, d\psi \end{aligned}$$

Avec cette nouvelle variable nous avons :

$$\begin{aligned} dt &= \sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(m+M)}}\frac{(a-ae\cos\psi)\,ae\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{a^2e^2-a^2e^2\cos^2\psi}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(m+M)}}\frac{(a-ae\cos\psi)\,ae\sin\psi\, d\psi}{ae\sin\psi} \\ &= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}}(1-e\cos\psi)\, d\psi \end{aligned}$$

On suppose de nouveau qu'à l'instant initial la planète est au périhélie, c'est à dire $\rho = \rho_{min}$, $\psi = 0$, et $\theta = \phi$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau} dt &= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}} \int_0^{\Psi} (1 - e\cos\psi)\, d\psi \\
\tau &= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}} \Big[\psi - e\sin\psi\Big]_0^{\Psi} \\
&= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}} (\Psi - e\sin\Psi)
\end{aligned}$$

Nous pouvons déterminer la période de révolution d'une deuxième façon. La planète effectue une demi-période $T/2$ quand ρ varie de ρ_{min} à ρ_{max}, et avec l'égalité (20), quand ψ varie de 0 à π,

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2} &= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}} (\pi - e\, sin \pi) \\
T &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}(m+M)}} \\
T^2 &= \frac{4\pi^2\, a^3}{\mathcal{G}(m+M)}
\end{aligned}$$

On retrouve ici le résultat du paragraphe 6.6.
En introduisant la période T puis la pulsation ω, la solution de l'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{T}{2\pi}(\Psi - e\ \sin\Psi) \\
\omega\,\tau &= \Psi - e\ \sin\Psi
\end{aligned} \tag{21}$$

appelée *équation de Kepler*. L'angle $\omega\,\tau$ s'appelle *anomalie moyenne*.

Nous allons revenir à la variable ρ en inversant le changement de variable (20). Dans la pratique cela n'est jamais fait, nous verrons pourquoi :

$$\begin{aligned}
\rho &= a - ae\cos\psi \\
\frac{a-\rho}{ae} &= \cos\psi \\
\psi &= \arccos\left(\frac{a-\rho}{ae}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\omega\,\tau = \arccos\left(\frac{a-\varrho}{ae}\right) - e\ \sin\arccos\left(\frac{a-\varrho}{ae}\right) \tag{22}$$

On fixe ϱ pour obtenir τ. Pour la détermination de l'angle θ à partir du rayon ϱ, nous utilisons alors l'équation de l'orbite (12) :

$$\varrho + \varrho\, e \cos(\theta - \phi) = p$$
$$\cos(\theta - \phi) = \frac{p - \varrho}{\varrho e}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{p - \varrho}{\varrho e}\right) + \phi$$

Cette méthode n'est pas optimale pour un calcul sur ordinateur, avec un sinus d'arcosinus dans l'expression (22). Il est préférable de fixer Ψ pour trouver l'époque τ grâce à l'équation de Kepler (21), puis de trouver la distance au Soleil ϱ en utilisant le changement de variable (20). Enfin, nous pouvons trouver la valeur correspondante de l'angle θ en utilisant l'équation de l'orbite (12) et le changement de variable (20) qui donne chacun le rayon ρ :

$$a - ae\cos\psi = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \phi)}$$
$$1 + e\cos(\theta - \phi) = \frac{a(1 - e^2)}{a(1 - e\cos\psi)}$$
$$e\cos(\theta - \phi) = \frac{1 - e^2 - (1 - e\cos\psi)}{1 - e\cos\psi}$$
$$\cos(\theta - \phi) = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}\right) + \phi$$

Nous pouvons utiliser une forme alternative pour exprimer θ en fonction de ψ :

$$1 - \cos(\theta - \phi) = 1 - \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$
$$2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1 - e\cos\psi - \cos\psi + e}{1 - e\cos\psi}$$
$$= \frac{(1 + e)(1 - \cos\psi)}{1 - e\cos\psi}$$

et,

$$1 + \cos(\theta - \phi) = 1 + \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$
$$2\cos^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1 - e\cos\psi + \cos\psi - e}{1 - e\cos\psi}$$
$$= \frac{(1 - e)(1 + \cos\psi)}{1 - e\cos\psi}$$

en faisant le rapport,

$$\tan^2 \tfrac{\theta}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos\psi)}{(1-e)(1+\cos\psi)}$$

$$\tan \tfrac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \tan \tfrac{\psi}{2}$$

$$\theta = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \tan \tfrac{\psi}{2} \right)$$

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/