LOGARITHME NÉPÉRIEN

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Présentation du nombre d'Euler e.

1. Puissances

Définition 1.1. *Nous dirons que a est élevé à la puissance n si a est multiplié par lui-même n fois :*

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}$$

Cette expression est notée a^n.

Propriété 1.1. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^*,$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Démonstration. En se servant de la définition 1.1,

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m} \\ &= \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n+m} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

$\square$

Propriété 1.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Démonstration. $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\begin{aligned} a^m \times \frac{1}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m-n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

Date: 27 avril 2014.

En se servant de la propriété 1.1,

$$\begin{aligned}a^m \times \frac{1}{a^n} &= a^m \times a^{-n}\\ \frac{1}{a^n} &= a^{-n}\end{aligned}$$

Et nous avons maintenant $n \in \mathbb{Z}^*$. □

Propriété 1.3. $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a^0 = 1$

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}} = 1$$

Avec la propriété 1.2,

$$\begin{aligned}a^{n-n} &= 1\\ a^0 &= 1\end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Z}$. □

Propriété 1.4. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (n,m) \in \mathbb{Z},\ (a^n)^m = a^{n\times m}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n})^m\\ &= \underbrace{(\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}) \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}) \times \cdots \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n})}_{m\ termes\ de\ n\ termes}\\ &= a^{n\times m}\end{aligned}$$

□

Propriété 1.5. $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{Z}^*$
ou bien, $\forall a \in \mathbb{R}^-$, $\forall n$ *impaire* $\in\ \mathbb{Z}^*$,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

appelé racine n-ième de a.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\text{Soit} \qquad A^n &= a \\
\text{Par définition de la racine } n\text{-ième} \qquad A &= \sqrt[n]{a} \\
\text{Or, d'après la définition 1.1} \qquad A &= A^1 \\
&= A^{n/n} \\
\text{et d'après la propriété 1.4} \qquad &= (A^n)^{1/n} \\
&= a^{1/n} \\
\text{Donc} \qquad a^{1/n} &= \sqrt[n]{a}
\end{aligned}$$

Et $n \in \mathbb{Q}$. □

2. Logarithmes

Définition 2.1. *On définit la fonction logarithme comme étant la fonction réciproque de la fonction puissance :*

$$\log_a(a^x) = x$$

Propriété 2.1. $\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y$

Démonstration. Avec la propriété 1.1 des puissances,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a\left(a^{x+y}\right)$$

En appliquant la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = x + y$$

En appliquant de nouveau la définition 2.1 du logarithme sur le second membre,

$$\log_a(a^x \times a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y$$

En posant $X = a^x$ et $Y = a^y$ nous avons,

$$\log_a(X \times Y) = \log_a X + \log_a Y$$

□

Propriété 2.2.

$$\log_a X^n = n \log_a X$$

Démonstration.

$$\log_a X^n = \log_a(\underbrace{X \times X \cdots \times X}_{n})$$

En utilisant la propriété 2.1 des logarithmes,

$$\begin{aligned}
\log_a X^n &= \log_a X + \log_a X + \cdots + \log_a X \\
&= n \log_a X
\end{aligned}$$

□

Propriété 2.3. $a^{\log_a X} = X$

Démonstration. En partant de la définition 2.1 du logarithme,

$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a a^x} = a^x$$

En posant $X = a^x$,

$$a^{\log_a X} = X$$

□

Propriété 2.4. $\log_b X = \log_a X \times \log_b a$

Démonstration. En utilisant la propriété 2.3,

$$X = a^{\log_a X}$$
$$\log_b X = \log_b \left(a^{\log_a X}\right)$$

Nous pouvons descendre l'exposant en utilisant la propriété 2.2,

$$\log_b X = \log_a X \times \log_b a$$

□

3. Démonstration du théorème de Newton sur le Logarithme népérien

Théorème 3.1. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Démonstration. On dérive un logarithme de base « a » inconnue :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log_a x &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] \\
&= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]
\end{aligned}$$

Or,

$$\forall x, \quad \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \approx 2,718281828459045235360 28$$

nombre appelé constante d'Euler et noté e. Donc,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$$

Pour $a = e$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_e x &= \frac{1}{x}\log_e e\\ &= \frac{1}{x}\\ [\log_e t]_1^x &= \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt\\ \log_e x - \log_e 1 &= \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt\end{aligned}$$

Le logarithme de base e se notant ln, nous avons :

$$\ln x - \ln 1 = \int_1^x \tfrac{1}{t}\,dt$$

Il reste à démontrer que $\ln 1 = 0$. Avec la définition 2.1, et avec la propriété 1.3 :

$$\begin{aligned}\forall b, \quad \log_b b^0 = 0\\ \forall b, \quad \log_b 1 = 0\end{aligned}$$

Vrai $\forall b$, donc pour $b = e$. □

4. La démonstration de Leonhard Euler

Théorème 4.1. $e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Démonstration. Euler cherche à exprimer la fonction puissance sous la forme d'un polynôme[2]. Soient $a, A, B, C, D, \dots$ des constantes, alors :

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

D'après la propriété 1.3,

$$a^0 = 1 \;\Rightarrow\; A = 1$$

De plus, d'après la propriété 1.4 :

$$\begin{aligned}a^{2x} &= (a^x)^2\\ 1 + B(2x) + C(2x)^2 + D(2x)^3 + \dots &= (1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots)^2\end{aligned}$$

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}1+2Bx+4Cx^2+8Dx^3+\ldots &= (1+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots)\\ &\quad\times(1+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots)\\ &= 1+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\\ &\quad+Bx+B^2x^2+BCx^3+\ldots\\ &\quad+Cx^2+BCx^3+\ldots\\ &\quad+Dx^3+\ldots\\ &= 1+2Bx+(B^2+2C)x^2\\ &\quad+2(BC+D)x^3+\ldots\end{aligned}$$

En égalant les coefficients,

$$\begin{aligned}4C &= B^2+2C\\ C &= \frac{B^2}{2}\\ 8D &= 2(BC+D)\\ 3D &= BC\\ D &= \frac{B^3}{2.3}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$a^x = 1+Bx+\frac{B^2}{2}x^2+\frac{B^3}{2.3}x^3+\ldots$$

Sous cette forme, la fonction puissance la plus simple est celle pour laquelle $B=1$:

$$a^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

et l'on peut calculer le a auquel elle correspond en posant $x=1$:

$$\begin{aligned}a &= 1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\ldots\\ &= 2.718281828\ldots\end{aligned}$$

que l'on note e. On définit alors la fonction exponentielle par :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

□

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/

1. Voir Puissances et logarithmes.pdf
2. Tangente Hors Série numéro 29