LA LOI NORMALE

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. La loi normale est la loi asymptotique de la loi binomiale lorsque le nombre de tirages tend vers l'infini.

TABLE DES MATIÈRES

1. La loi binomiale 1
2. La loi normale 6
3. Représentation graphique 11

1. LA LOI BINOMIALE

C'est la loi de probabilité discrète des tirages non exhaustifs, c'est à dire avec remise, dans une urne à deux catégories. Soit une urne contenant N boules, N_1 blanches et N_2 noires :

$$N_1 + N_2 = N$$

Les boules blanches sont dans la proportion P, et les noires dans la proportion Q

$$P = \frac{N_1}{N}$$
$$Q = \frac{N_2}{N}$$

par conséquent,

$$N_1 + N_2 = N$$
$$\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = 1$$
$$P + Q = 1$$

A chaque tirage, la probabilité de sortir une boule blanche est P, celle de sortir une boule noire est Q.

Exemples.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis une noire ?

Date: 6 mai 2015.

PQ
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une noire, peu importe l'ordre ?
$PQ + QP = 2PQ$
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis deux noires ?
$PQQ = PQ^2$
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et deux noires, peu importe l'ordre ?
$PQQ + QPQ + QQP = 3PQ^2$

Effectuons n tirages. La probabilité $\mathcal{P}_i$ de sortir dans un ordre donné, x_i boules blanches et x_j boules noires est

$$\mathcal{P}_i = P^{x_i} Q^{x_j}$$

Si l'on ne spécifie pas l'ordre, nous devons permuter les n tirages, soit $n!$ permutations, et supprimer les permutations inutiles des boules blanches entre elles, $x_i!$ permutations, et des boules noires entre elles, $x_j!$ permutations. La probabilité $\mathcal{P}_i$ s'écrit alors

$$\mathcal{P}_i = \frac{n!}{x_i! x_j!} \, P^{x_i} Q^{x_j}$$

Les valeurs x_i et x_j sont liées au paramètre n par,

$$\begin{aligned} n &= x_i + x_j \\ x_j &= n - x_i \end{aligned}$$

et la probabilité $\mathcal{P}_i$ de sortir x_i boules blanches, lorsque l'on ne spécifie pas l'ordre, se réécrit

$$\mathcal{P}_i = \frac{n!}{x_i!(n - x_i)!} \, P^{x_i} Q^{n - x_i} \tag{1}$$

On reconnait le terme de rang x_i dans le développement du binôme de Newton

$$\begin{aligned} (Q + P)^n &= Q^n + nQ^{n-1}P + \cdots + \frac{n! \, P^{x_i} Q^{n-x_i}}{x_i!(n - x_i)!} + \cdots + nQP^{n-1} + P^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{x_i!(n - x_i)!} \, P^{x_i} Q^{n-x_i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i \end{aligned}$$

On note que,

$$\begin{aligned} (Q + P)^n &= 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cette loi de probabilité $\mathcal{P}_i$ faisant intervenir le binôme de Newton s'appelle loi binomiale.

Définition 1.1. On appelle *variable aléatoire* discrète X, une *fonction* qui associe à chaque résultat d'une expérience, une valeur x_i inconnue d'avance, parmi un ensemble de valeurs possibles $x_1, x_2, \ldots$.

Définition 1.2. On appelle *espérance mathématique* ou valeur moyenne de la variable aléatoire discrète X, la somme des produits de toutes les valeurs x_i possibles de cette variable par les probabilités p_i de ces valeurs. On la note $E[X]$, ou $M[X]$, ou μ, ou m_x, ou encore $\bar{x}$. On a

$$E[X] \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a

$$E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Définition 1.3. On appelle *moment initial d'ordre* s d'une variable aléatoire discrète X, la fonction $\alpha_s[X]$ définie par

$$\alpha_s[X] \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i^s \, \mathcal{P}_i$$

Initial signifiant que le moment est calculé par rapport à l'origine des coordonnées. Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a

$$\alpha_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx$$

Par conséquent le moment d'ordre un, $\alpha_1[X]$, se confond avec l'espérance mathématique $E[X]$ de la variable aléatoire X

$$\alpha_1[X] \triangleq E[X]$$

Les moments permettent de caractériser la loi de probabilité $\mathcal{P}$, en donnant sa position, son degré de dispersion, et sa forme. Ils peuvent être calculés grâce à la fonction génératrice des moments.

Définition 1.4. On appelle *fonction génératrice des moments* $\phi(u)$, la fonction définie par

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\triangleq \sum_{i=0}^{n} u^{x_i} \, \mathcal{P}_i & (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n} u^{x_i} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} P^{x_i} Q^{n-x_i}\\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} (Pu)^{x_i} Q^{n-x_i}\\
&= (Q + Pu)^n & (3)
\end{aligned}$$

Calculons le moment initial d'ordre zéro grâce à sa définition et à la fonction génératrice des moments :

$$\begin{aligned}\alpha_0[X] &\triangleq \sum_{i}^{n} \mathcal{P}_i \\ &= \phi(1) \\ &= (Q+P)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

Les dérivations successives de $\phi(u)$ vont nous permettre de trouver l'expression des moments d'ordres suivants. En dérivant les deux expressions (2) et (3) de $\phi(u)$ données à la définition 1.4, nous avons :

$$\phi'(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i u^{x_i - 1} \mathcal{P}_{x_i} \tag{4}$$
$$= n(Q+Pu)^{n-1}P \tag{5}$$

Le moment d'ordre un, autrement dit l'espérance mathématique, est donné par

$$\begin{aligned}\alpha_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i \mathcal{P}_i \\ &= \phi'(1) \\ &= n(Q+P)^{n-1}P \\ &= nP\end{aligned}$$

C'est le nombre de boules blanches que je peux espérer tirer lors de n tirages. Calculons maintenant la dérivée seconde de $\phi(u)$ en dérivant les deux expressions (4) et (5) :

$$\phi''(u) = \sum_{i=0}^{n} x_i(x_i - 1) u^{x_i - 2} \mathcal{P}_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 u^{x_i-2} \mathcal{P}_i - \sum_{i=0}^{n} x_i u^{x_i - 2} \mathcal{P}_i \tag{6}$$
$$= n(n-1)(Q+Pu)^{n-2}P^2$$

En utilisant (6), le moment d'ordre deux est donné par :

$$\begin{aligned}
\alpha_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i^2\,\mathcal{P}_i \\
&= \phi''(1) + \alpha_1[X] \\
&= n(n-1)P^2 + nP \\
&= n^2P^2 - nP^2 + nP \\
&= n^2P^2 + nP(1-P) \\
&= \bar{x}^2 + nPQ
\end{aligned} \tag{7}$$

Définition 1.5. On appelle *variable aléatoire centrée* associée à X, et l'on note $\mathring{X}$, la différence :

$$\mathring{X} = X - E[X]$$

Définition 1.6. On appelle *moment centré d'ordre s* d'une variable aléatoire discrète X, la fonction $\mu_s[X]$ définie par :

$$\mu_s[X] \triangleq \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^s\,\mathcal{P}_i$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a

$$\mu_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x})^s f(x)dx$$

Le moment centré d'ordre un est nul :

$$\begin{aligned}
\mu_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i\,\mathcal{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x})\mathcal{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i\,\mathcal{P}_i - \bar{x}\sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i \\
&= \bar{x} - \bar{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Calculons le moment centré d'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\mu_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i^{\,2}\, \mathcal{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (x_i - \bar{x})^2\, \mathcal{P}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i^2\, \mathcal{P}_i - 2\bar{x} \sum_{i=0}^{n} x_i\, \mathcal{P}_i + \bar{x}^2 \sum_{i=0}^{n} \mathcal{P}_i \\
&= \alpha_2[X] - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 \\
&= \alpha_2[X] - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

Avec (7),

$$\begin{aligned}
\mu_2[X] &= n^2P^2 - nP^2 + nP - n^2P^2 \\
&= nP(1-P) \\
&= nPQ
\end{aligned}$$

Définition 1.7. On appelle *variance* de la variable aléatoire discrète X, son moment centré d'ordre deux. C'est l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée associée. On la note $V[X]$ ou V_x ou $D[X]$ ou encore D_x.

$$V[X] \triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i^{\,2}\, \mathcal{P}_i$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a :

$$V[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathring{x}_i^{\,2} f(x)dx$$

Définition 1.8. On appelle *écart quadratique moyen* de la variable aléatoire X, la racine carrée de la variance. On le note $\sigma[X]$.

$$\sigma[X] \triangleq \sqrt{V[X]}$$

2. La loi normale

Théorème 2.1. *De De Moivre ou de Laplace*
La probabilité asymptotique $\mathcal{P}_i$ de tirer x_i boules blanches lorsque le nombre de tirage n tend vers l'infini, tend vers une loi gaussienne :

$$\mathcal{P}_i \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi nPQ}}\, e^{-\dfrac{\mathring{x}_i^{\,2}}{2nPQ}}$$

Démonstration. Lorsque le nombre n tend vers l'infini, nous pouvons utiliser la formule de Stirling[1] pour approximer factorielle n :

$$\begin{aligned} n! &\simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \\ \ln n! &\simeq n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Stirling[2] à la relation (1), nous avons

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{P}_i = \ln &\left[\frac{n!}{x!(n-x_i)!}\, P^{x_i} Q^{n-x_i}\right] \\ &\simeq \ln(n!) - \ln(x_i!) - \ln[(n-x_i)!] + x_i \ln P + (n-x_i)\ln Q \\ &\simeq n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) - x_i \ln x_i + x_i - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi x_i) \\ &\qquad - (n-x_i)\ln(n-x_i) + (n-x_i) - \tfrac{1}{2}\ln[2\pi(n-x_i)] \\ &\qquad\quad + x_i \ln P + (n-x_i)\ln Q \\ &\simeq n\ln n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ &\qquad - x_i\ln x_i - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi x_i) \\ &\qquad\quad - (n-x_i)\ln(n-x_i) - \tfrac{1}{2}\ln[2\pi(n-x_i)] \\ &\qquad\qquad + x_i\ln P + (n-x_i)\ln Q \end{aligned}$$

On effectue un changement de variable pour utiliser la variable aléatoire centrée $\mathring{X}_i$

$$\begin{aligned} \mathring{x}_i &= x_i - \bar{x}_i \\ x_i &= \bar{x}_i + \mathring{x}_i \\ &= nP + \mathring{x}_i \end{aligned}$$

la variable aléatoire $n - x_i$ devient

$$\begin{aligned} n - x_i &= n - nP - \mathring{x}_i \\ &= nQ - \mathring{x}_i \end{aligned}$$

1. Voir Stirling.pdf
2. Georges Bresson, *Probabilités et statistiques*, édition Meral 1985

et $\ln \mathcal{P}_i$ s'écrit maintenant

$$
\begin{aligned}
\ln \mathcal{P}_i \simeq{} & n \ln n + \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
& - (nP + \mathring{x}_i) \ln(nP + \mathring{x}_i) - \tfrac{1}{2} \ln[2\pi(nP + \mathring{x}_i)] \\
& - (nQ - \mathring{x}_i) \ln(nQ - \mathring{x}_i) - \tfrac{1}{2} \ln[2\pi(nQ - \mathring{x}_i)] \\
& + (nP + \mathring{x}_i) \ln P + (nQ - \mathring{x}_i) \ln Q \\
\simeq{} & n \ln n + \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
& - (nP + \mathring{x}_i) \left[\ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) + \ln(nP)\right] \\
& - \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) - \tfrac{1}{2} \ln(nP) \\
& - (nQ - \mathring{x}_i) \left[\ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) + \ln(nQ)\right] \\
& - \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) - \tfrac{1}{2} \ln(nQ) \\
& + (nP + \mathring{x}_i) \ln P + (nQ - \mathring{x}_i) \ln Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln \mathcal{P}_i \simeq{} & n \ln n + \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
& - \left(nP + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) - (nP + \mathring{x}_i) \ln(nP) \\
& - \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln(nP) \\
& - \left(nQ - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) - (nQ - \mathring{x}_i) \ln(nQ) \\
& - \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln(nQ) \\
& + (nP + \mathring{x}_i) \ln P + (nQ - \mathring{x}_i) \ln Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln \mathcal{P}_i \simeq{} & n \ln n + \tfrac{1}{2} \cancel{\ln}(2\pi) + \tfrac{1}{2} \cancel{\ln} n \\
& - \left(nP + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) \\
& - nP \ln n - \mathring{x}_i \cancel{\ln} n - nP \cancel{\ln} P - \mathring{x}_i \cancel{\ln} P \\
& - \tfrac{1}{2} \cancel{\ln}(2\pi) - \tfrac{1}{2} \cancel{\ln} n - \tfrac{1}{2} \ln P \\
& - \left(nQ - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) \\
& - nQ \ln n + \mathring{x}_i \cancel{\ln} n - nQ \cancel{\ln} Q + \mathring{x}_i \cancel{\ln} Q \\
& - \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln n - \tfrac{1}{2} \ln Q \\
& + nP \cancel{\ln} P + \mathring{x}_i \cancel{\ln} P + nQ \cancel{\ln} Q - \mathring{x}_i \cancel{\ln} Q
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{P}_i &\simeq n\cancel{\ln n} - n(P+Q)\cancel{\ln n} - \tfrac{1}{2}\ln P - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln n - \tfrac{1}{2}\ln Q \\
&\quad - \left(nP + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) - \left(nQ - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) \\
&\simeq -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \left(nP + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) \\
&\quad - \left(nQ - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\mathring{x}_i}{nP} &= \frac{x_i - nP}{nP} \\
&= \frac{x_i}{nP} - 1 \\
&= \frac{x_i N}{nN_1} - 1
\end{aligned}$$

Le théorème de Jacques Bernoulli[3] stipule que lors d'un grand nombre d'expériences, la fréquence d'un évènement tend (converge en probabilité) vers la probabilité de cet évènement. Pour simplifier nous ferons un abus d'écriture en notant cette convergence en probabilité sous la forme d'une limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_i}{n} = \frac{N_1}{N} \tag{8}$$

si bien que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathring{x}_i}{nP} = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathring{x}_i}{nQ} &= \frac{\mathring{x}_i}{n(1-P)} \\
&= \frac{\mathring{x}_i}{nP} \times \frac{P}{1-P}
\end{aligned}$$

le deuxième terme étant constant, on en déduit,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathring{x}_i}{nQ} = 0$$

3. Voir Théorème central limite.pdf

Par conséquent, on peut utiliser le développement limité à l'ordre deux du logarithme népérien :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\varepsilon) &\simeq \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \\
\ln\left(1+\frac{\mathring{x}_i}{nP}\right) &\simeq \frac{\mathring{x}_i}{nP} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n^2P^2} \\
\ln\left(1-\frac{\mathring{x}_i}{nQ}\right) &\simeq -\frac{\mathring{x}_i}{nQ} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n^2Q^2}
\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{P}_i \simeq{}& -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \left(nP + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathring{x}_i}{nP} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n^2P^2}\right) \\
&- \left(nQ - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right)\left(-\frac{\mathring{x}_i}{nQ} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n^2Q^2}\right) \\
\simeq{}& -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \cancel{\mathring{x}_i} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{nP} - \frac{\mathring{x}_i}{2nP} + \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2nP} + \frac{\mathring{x}_i{}^3}{2n^2P^2} + \frac{\mathring{x}_i{}^2}{4n^2P^2} \\
&+ \cancel{\mathring{x}_i} - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{nQ} + \frac{\mathring{x}_i}{2nQ} + \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2nQ} - \frac{\mathring{x}_i{}^3}{2n^2Q^2} + \frac{\mathring{x}_i{}^2}{4n^2Q^2} \\
\simeq{}& -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \frac{\mathring{x}_i}{2n}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) - \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q}\right) \\
&+ \frac{\mathring{x}_i{}^3}{2n^2}\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) + \frac{\mathring{x}_i{}^2}{4n^2}\left(\frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2}\right)
\end{aligned}$$

En se servant de la relation (8), nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\mathring{x}_i}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_i - nP}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_i}{n} - \frac{N_1}{N}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

si bien que quand n tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathring{x}_i}{n} &\ll 1 \\
\frac{\mathring{x}_i{}^3}{2n^2} &\ll \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n}
\end{aligned}$$

et toujours avec n tendant vers l'infini,

$$\frac{\mathring{x}_i{}^2}{4n^2} \ll \frac{\mathring{x}_i{}^2}{2n}$$

Les deux derniers termes sont donc négligeables par rapport au troisième :

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{P}_i &\simeq -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \frac{\mathring{x}_i}{2n}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right) - \frac{\mathring{x}_i^{\,2}}{2n}\left(\frac{P+Q}{PQ}\right)\\ &\simeq -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \frac{\mathring{x}_i(Q-P)}{2nPQ} - \frac{\mathring{x}_i^{\,2}}{2nPQ}\end{aligned}$$

On admettra que la différence entre le nombre de boules blanches tirées et l'espérance mathématique, autrement dit la variable aléatoire centrée $\mathring{x}_i = x_i - \bar{x}_i$, tend vers l'infini avec n. Comme $-1 \leqslant Q - P \leqslant 1$ cela implique que $\mathring{x}_i \gg Q - P$, et par conséquent le deuxième terme est négligeable devant le troisième :

$$\ln \mathcal{P}_i \simeq -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi nPQ) - \frac{\mathring{x}_i^{\,2}}{2nPQ}$$

$$\mathcal{P}_i \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi nPQ}}\, e^{-\dfrac{\mathring{x}_i^{\,2}}{2nPQ}}$$

En utilisant les variables $\bar{x}_i$ et σ :

$$\mathcal{P}_i \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x_i-\bar{x}_i)^2}{2\sigma^2}}$$

qui est l'expression de la densité de probabilité de la loi normale, d'espérance mathématique $\bar{x}$ et de variance σ^2. Cette loi est aussi appelée loi de Gauss, loi de Laplace-Gauss, Gaussienne, ou courbe en cloche. On la note $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$. □

3. Représentation graphique

La fonction $P(x)$ est positive, elle tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour dériver $P(x)$, posons $A = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$, $B = (2\sigma^2)^{-1}$ et $X = x - \bar{x}$. Nous avons alors $dX = dx$ et :

$$\begin{aligned}P(X) &= Ae^{-BX}\\ \frac{dP(X)}{dX} &= -2ABXe^{-BX^2}\\ \frac{dP(x)}{dx} &= -2AB(x-\bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2}\end{aligned}$$

Etudions le signe de la dérivée :

$$\begin{aligned}-2AB(x-\bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2} &\geqslant 0\\ x-\bar{x} &\leqslant 0\\ x &\leqslant \bar{x}\end{aligned}$$

La dérivée s'annule et change de signe au point de coordonnées $(\bar{x}, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$. La loi normale est maximale en ce point. Calculons la dérivée seconde :

$$\frac{dP(X)}{dX} = -2ABXe^{-BX^2}$$
$$\frac{d^2P(X)}{dX^2} = -2ABe^{-BX^2} + 4AB^2X^2e^{-BX^2}$$

Etudions le signe de la dérivée seconde :

$$4AB^2(x-\bar{x})^2e^{-B(x-\bar{x})^2} - 2ABe^{-B(x-\bar{x})^2} \geqslant 0$$
$$[2B(x-\bar{x})^2 - 1]e^{-B(x-\bar{x})^2} \geqslant 0$$
$$(x-\bar{x})^2 \geqslant \frac{1}{2B}$$
$$\begin{cases} x-\bar{x} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2B}} \\ x-\bar{x} \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2B}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geqslant \bar{x}+\sigma \\ x \leqslant \bar{x}-\sigma \end{cases}$$

La dérivée seconde s'annule et change de signe aux points d'abscisses $\bar{x}+\sigma$ et $\bar{x}-\sigma$. Ces deux points sont des points d'inflexion de la fonction $P(x)$. Sur la figure ci-dessous, l'échelle des ordonnées est dilatée d'un facteur dix par rapport à celle des abscisses.

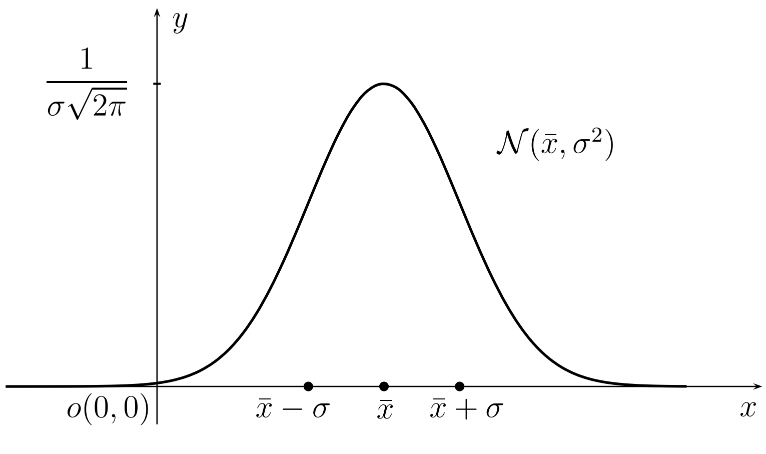

FIGURE 1. La loi normale

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/