LA LOI NORMALE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. La loi normale est la loi asymptotique de la loi binomiale lorsque le nombre de tirages tend vers l'infini.

Table des matières

1. La loi binomiale

C'est la loi de probabilité discrète des tirages avec remise, dans une urne à deux catégories. Soit une urne contenant N boules, N_1 blanches et N_2 noires :

$$N_1 + N_2 = N$$

Les boules blanches sont dans la proportion p, et les noires dans la proportion q :

$$p \triangleq \frac{N_1}{N}$$
$$q \triangleq \frac{N_2}{N}$$

Pour une urne contenant au moins une boule de chaque couleur :

$$0 < p < 1$$
$$0 < q < 1$$

Date: 11 juillet 2017.

De plus

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= N \\ \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} &= 1 \\ p + q &= 1 \end{aligned}$$

A chaque tirage avec remise, la probabilité de sortir une boule blanche est p, celle de sortir une boule noire est q.

Tirer au hasard une seule boule parmi des boules de deux couleurs différentes constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Dans les exemples suivants nous considérons une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Exemples.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

$$p$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis une noire ?

$$pq$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une noire, peu importe l'ordre ?

$$pq + qp = 2pq$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis deux noires ?

$$pqq = pq^2$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et deux noires, peu importe l'ordre ?

$$pqq + qpq + qqp = 3pq^2$$

Quelle est la probabilité de tirer trois boules noires ?

$$q^3$$

Quelle est la probabilité de sortir dans un ordre donné x_i boules blanches et y_i boules noires lors de n tirages avec remise ?

$$\mathbb{P}_i(x_i) = p^{x_i}\, q^{y_i}$$

Le nombre n de boules tirées est égale au nombre de boules blanches tirées plus le nombre de boules noires tirées :

$$n = x_i + y_i$$

si bien que :

$$\mathbb{P}_i(x_i) = p^{x_i}\, q^{n-x_i}$$

Si l'on ne spécifie pas l'ordre, nous devons permuter les n tirages (ce sont les lettres p et q que l'on permute et non les boules), soit $n!$ permutations, et supprimer les permutations inutiles des lettres p entre elles, $x_i!$ permutations, et des lettres q entre elles, $(n - x_i)!$ permutations.

La probabilité de sortir dans n'importe quel ordre x_i boules blanches et $n - x_i$ boules noires lors de n tirages avec remise s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(x_i) &= \frac{n!}{x_i!(n - x_i)!}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i} \qquad (1) \\ &= C_n^{x_i}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i} \end{aligned}$$

où $C_n^{x_i}$ est le nombre de combinaisons de x_i lettres p prises parmi n lettres p et q. Le nombre x_i de boules blanches tirées est compris entre 0 et n :

$$0 \leqslant x_i \leqslant n$$

Nous poserons $i = 0, \dots, n$ de sorte que $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n$.

Exemple 1. Appliquons la formule aux exemples précédents. Quelle est la probabilité de tirer trois boules noires ?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0) &= \frac{3!}{0!\,(3-0)!}\, p^0 q^3 \\ &= q^3 \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et deux noires, peu importe l'ordre ?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1) &= \frac{3!}{1!\,(3-1)!}\, p^1 q^2 \\ &= 3pq^2 \end{aligned}$$

La relation (1) est le terme de rang x_i dans le développement du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (q+p)^n &= q^n + nq^{n-1}p + \cdots + \frac{n!\, p^{x_i}\, q^{n-x_i}}{x_i!(n-x_i)!} + \cdots + nqp^{n-1} + p^n \\ 1^n &= \sum_{x_i=0}^{n} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i} \\ 1 &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_i(x_i) \end{aligned}$$

Cette loi de probabilité $\mathbb{P}_i(x_i)$ faisant intervenir le binôme de Newton s'appelle loi binomiale. Elle se note $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, où le nombre de tirages n et la probabilité p sont les paramètres de la loi.

Définition 1.1. On appelle *variable aléatoire* discrète X, une *fonction* qui associe à chaque résultat d'une expérience, une valeur x inconnue d'avance, parmi un ensemble de valeurs possibles $x_1, x_2, \dots$.

Exemples. La variable aléatoire X de la loi binomiale est la fonction qui associe à n tirages le nombre x de boules blanches obtenues. La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x s'écrit en toute rigueur $\mathbb{P}(X = x)$.

La variable aléatoire X de la loi de Bernoulli est la fonction qui associe à un unique tirage la couleur de la boule obtenue parmi seulement deux couleurs possibles. X prend la valeur 1 en cas de succès (tirage d'une boule blanche) et 0 en cas d'échec (tirage d'une boule noire). La loi de Bernoulli de paramètre p s'écrit :

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x},\ x \in \{0, 1\}$$

Une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes permet la construction d'une variable aléatoire qui a pour loi de probabilité la loi binomiale.

Définition 1.2. On appelle *espérance mathématique* ou valeur moyenne de la variable aléatoire discrète X, la somme des produits de toutes les valeurs x_i possibles de cette variable aléatoire par les probabilités $\mathbb{P}_i(X = x_i)$ de ces valeurs. On la note $\bar{x}$, $E[X]$, $M[X]$, μ, ou m_i :

$$\bar{x} \triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i\, \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a :

$$\bar{x} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Exemple 2. Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. Si l'on effectue 3 tirages avec remise, combien sortira-t-on de boules blanches en moyenne ?

$$\bar{x} = 1\mathbb{P}(X = 1) + 2\mathbb{P}(X = 2) + 3\mathbb{P}(X = 3)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{4}{10} \times \left(\frac{6}{10}\right)^2 \times \frac{3!}{3!\,(3-1)!}\\ &= 0,432\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times \frac{6}{10} \times \frac{3!}{2!\,(3-2)!}\\ &= 0,288\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 3) &= \left(\frac{4}{10}\right)^3 \times \frac{3!}{3!\,(3-3)!}\\ &= 0,64\end{aligned}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,64 \\ &= 1,2\end{aligned}$$

Nous pouvons espérer sortir $1,2$ boule blanche en moyenne sur trois tirages.

Définition 1.3. On appelle *moment initial d'ordre s* d'une variable aléatoire discrète X, la fonction $\alpha_s[X]$ définie par :

$$\alpha_s[X] \triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i^s \, \mathbb{P}_i(X = x_i)$$

Initial signifie que le moment est calculé par rapport à l'origine des coordonnées. Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a :

$$\alpha_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx$$

Par définition, le moment d'ordre un, $\alpha_1[X]$, se confond avec l'espérance mathématique $\bar{x}$ de la variable aléatoire X :

$$\alpha_1[X] \triangleq \bar{x}$$

Les moments permettent de caractériser la loi de probabilité en donnant sa position, son degré de dispersion, et sa forme. Ils peuvent être calculés grâce à la fonction génératrice des moments.

Définition 1.4. On appelle *fonction génératrice des moments $\phi(u)$*, la fonction définie par :

$$\begin{aligned}\phi(u) &\triangleq \sum_{i=0}^{n} u^{x_i} \, \mathbb{P}_i(X = x_i) & (2)\\ &= \sum_{i=0}^{n} u^{x_i} \, \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} \, p^{x_i} \, q^{n-x_i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} \, (pu)^{x_i} q^{n-x_i} \\ &= (q+pu)^n & (3)\end{aligned}$$

Calculons le moment initial d'ordre zéro grâce à sa définition et à la fonction génératrice des moments :

$$\begin{aligned}\alpha_0[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i^0\, \mathbb{P}_i(X = x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_i(X = x_i)\\ &= \phi(1)\\ &= (q+p)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

Les dérivations successives de $\phi(u)$ par rapport à u vont nous permettre de trouver l'expression des moments d'ordres suivants. En dérivant les deux expressions (2) et (3) de $\phi(u)$ données à la définition 1.4, nous avons :

$$\begin{aligned}\phi'(u) &= \sum_{i=0}^{n} x_i u^{x_i-1}\, \mathbb{P}_i(X = x_i) &(4)\\ &= n(q+pu)^{n-1}p &(5)\end{aligned}$$

Le moment d'ordre un (l'espérance mathématique), est donné par :

$$\begin{aligned}\alpha_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i\, \mathbb{P}_i(X = x_i)\\ &= \phi'(1)\\ &= n(q+p)^{n-1}p\\ &= np\end{aligned}$$

C'est le nombre moyen de boules blanches que je peux espérer tirer lors de n tirages.

Exemple 3. Reprenons l'exemple (2). Une urne contient 4 boules blanches et 6 noires. Si l'on effectue 3 tirages avec remise, combien sortira-t-on de boules blanches en moyenne ?

$$\begin{aligned}\bar{x} &= np\\ &= 3 \times \frac{4}{10}\\ &= 1,2\end{aligned}$$

Calculons la dérivée seconde de $\phi(u)$ en dérivant les deux expressions (4) et (5) :

$$\begin{aligned}\phi''(u) &= \sum_{i=0}^{n} x_i(x_i-1)u^{x_i-2}\,\mathbb{P}_i(X=x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 u^{x_i-2}\,\mathbb{P}_i(X=x_i) - \sum_{i=0}^{n} x_i u^{x_i-2}\,\mathbb{P}(X=x_i) \\ &= n(n-1)(q+pu)^{n-2}p^2\end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant (6), le moment d'ordre deux est donné par :

$$\begin{aligned}\alpha_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i^2\,\mathbb{P}_i(X=x_i) \\ &= \phi''(1)+\alpha_1[X] \\ &= n(n-1)p^2+np \\ &= n^2p^2-np^2+np \\ &= n^2p^2+np(1-p) \\ &= \bar{x}^2+npq\end{aligned} \tag{7}$$

Définition 1.5. On appelle *variable aléatoire centrée* associée à X, et l'on note $\mathring{X}$, la différence :

$$\mathring{X} = X - \bar{X}$$

où $\bar{X}$ est la variable aléatoire qui associe à n tirages le nombre moyen de boules blanches tirées.

Définition 1.6. On appelle *moment centré d'ordre s* d'une variable aléatoire discrète X, la fonction $\mu_s[X]$ définie par :

$$\mu_s[X] \triangleq \sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})^s\,\mathbb{P}_i(X=x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a :

$$\mu_s[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^s f(x)dx$$

Le moment centré d'ordre un est nul :

$$\begin{aligned}\mu_1[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i\,\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})\,\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} x_i\,\mathbb{P}_i(X=x_i) - \bar{x}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \bar{x}-\bar{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Calculons le moment centré d'ordre deux :

$$\begin{aligned}\mu_2[X] &\triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i^2\,\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})^2\,\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n} x_i^2\,\mathbb{P}_i(X=x_i) - 2\bar{x}\sum_{i=0}^{n} x_i\,\mathbb{P}_i(X=x_i) + \bar{x}^2\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}_i(X=x_i)\\ &= \alpha_2[X] - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2\\ &= \alpha_2[X] - \bar{x}^2\end{aligned}$$

Avec (7),

$$\begin{aligned}\mu_2[X] &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2\\ &= np(1-p)\\ &= npq\end{aligned}$$

Définition 1.7. On appelle *variance* de la variable aléatoire discrète X, son moment centré d'ordre deux. C'est l'espérance mathématique du carré de la variable aléatoire centrée associée. On la note $V[X]$ ou V_i ou $D[X]$ ou encore D_i :

$$V[X] \triangleq \sum_{i=0}^{n} \mathring{x}_i^2\,\mathbb{P}_i(X=x_i)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, on a :

$$V[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathring{x}^2 f(x)dx$$

Définition 1.8. On appelle *écart quadratique moyen* de la variable aléatoire X, la racine carrée de la variance. On le note $\sigma[X]$:

$$\sigma[X] \triangleq \sqrt{V[X]}$$

2. La loi normale

2.1. Théorème de De Moivre ou de Laplace.

Théorème. *De De Moivre ou de Laplace*
La probabilité asymptotique $\mathbb{P}(X = x)$ de tirer x boules blanches lorsque le nombre de tirage n tend vers l'infini, tend vers une loi gaussienne :

$$\mathbb{P}(X = x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$$

Démonstration. Lorsque n tend vers l'infini, nous pouvons utiliser la formule de Stirling[1] pour approximer factorielle n :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Les deux quantités sont asymptotiques, leur rapport tend vers 1 quand n tend vers l'infini. En réalité la formule de Stirling donne de « bonnes » valeurs dès les premiers entiers. Prenons le logarithme :

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n)$$

La relation (1) donne :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &= \ln\left[\frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i}\right] \\ &= \ln(n!) - \ln(x_i!) - \ln[(n-x_i)!] + x_i \ln p + (n - x_i)\ln q\end{aligned}$$

Appliquons trois fois la formule de Stirling[2] en supposant le nombre de tirages et les nombres de boules blanches et noires tirées grands :

$$\begin{cases} n \gg 1 \\ x_i \gg 1 \\ n - x_i \gg 1 \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas où x_i ou $n - x_i$ est petit devant n nous ferons une autre approximation (voir le paragraphe 3 sur la loi de Poisson).

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx\; & n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ & - x_i \ln x_i + x_i - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi x_i) \\ & - (n - x_i)\ln(n-x_i) + (n-x_i) - \tfrac{1}{2}\ln[2\pi(n-x_i)] \\ & + x_i \ln p + (n-x_i)\ln q \\ \approx\; & n \ln n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ & - x_i \ln x_i - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi x_i) \\ & - (n-x_i)\ln(n-x_i) - \tfrac{1}{2}\ln[2\pi(n-x_i)] \\ & + x_i\ln p + (n-x_i)\ln q\end{aligned}$$

1. Voir Stirling.pdf
2. Georges Bresson, *probabilités et statistiques*, édition Meral 1985

On effectue un changement de variable pour utiliser la variable aléatoire centrée $\mathring{X}$:

$$\begin{aligned}
\mathring{x}_i &= x_i - \bar{x} \\
x_i &= \bar{x} + \mathring{x}_i \\
&= np + \mathring{x}_i
\end{aligned}$$

$n - x_i$ devient :

$$\begin{aligned}
n - x_i &= n - np - \mathring{x}_i \\
&= nq - \mathring{x}_i
\end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx n \ln n &+ \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
&- (np + \mathring{x}_i) \ln(np + \mathring{x}_i) - \tfrac{1}{2} \ln[2\pi(np + \mathring{x}_i)] \\
&- (nq - \mathring{x}_i) \ln(nq - \mathring{x}_i) - \tfrac{1}{2} \ln[2\pi(nq - \mathring{x}_i)] \\
&+ (np + \mathring{x}_i) \ln p + (nq - \mathring{x}_i) \ln q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx n \ln n &+ \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
&- (np + \mathring{x}_i) \ln \left[np \left(\frac{np + \mathring{x}_i}{np} \right) \right] \\
&- \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln \left[np \left(\frac{np + \mathring{x}_i}{np} \right) \right] \\
&- (nq - \mathring{x}_i) \ln \left[nq \left(\frac{nq - \mathring{x}_i}{nq} \right) \right] \\
&- \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln \left[nq \left(\frac{nq - \mathring{x}_i}{nq} \right) \right] \\
&+ (np + \mathring{x}_i) \ln p + (nq - \mathring{x}_i) \ln q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx n \ln n &+ \tfrac{1}{2} \ln(2\pi n) \\
&- (np + \mathring{x}_i) \left[\ln \left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np} \right) + \ln(np) \right] \\
&- \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np} \right) - \tfrac{1}{2} \ln(np) \\
&- (nq - \mathring{x}_i) \left[\ln \left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq} \right) + \ln(nq) \right] \\
&- \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \tfrac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq} \right) - \tfrac{1}{2} \ln(nq) \\
&+ (np + \mathring{x}_i) \ln p + (nq - \mathring{x}_i) \ln q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx\ & n \ln n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\
& - \left(np + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np}\right) - (np + \mathring{x}_i)\ln(np) \\
& - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln(np) \\
& - \left(nq - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq}\right) - (nq - \mathring{x}_i)\ln(nq) \\
& - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln(nq) \\
& + (np + \mathring{x}_i)\ln p + (nq - \mathring{x}_i)\ln q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx\ & n \ln n + \tfrac{1}{2}\cancel{\ln}(2\pi) + \tfrac{1}{2}\cancel{\ln} n - \left(np + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np}\right) \\
& - np\ln n - np\cancel{\ln} p - \mathring{x}_i\cancel{\ln} n - \mathring{x}_i\cancel{\ln} p \\
& - \tfrac{1}{2}\cancel{\ln}(2\pi) - \tfrac{1}{2}\cancel{\ln} n - \tfrac{1}{2}\ln p \\
& - \left(nq - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq}\right) \\
& - nq\ln n - nq\cancel{\ln} q + \mathring{x}_i\cancel{\ln} n + \mathring{x}_i\cancel{\ln} q \\
& - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln n - \tfrac{1}{2}\ln q \\
& + np\cancel{\ln} p + \mathring{x}_i\cancel{\ln} p + nq\cancel{\ln} q - \mathring{x}_i\cancel{\ln} q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx\ & n\cancel{\ln} n - n(p+q)\cancel{\ln} n - \tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) - \tfrac{1}{2}\ln n - \tfrac{1}{2}\ln q \\
& - \left(np + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np}\right) \\
& - \left(nq - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) \approx\ & -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \left(np + \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{\mathring{x}_i}{np}\right) \\
& - \left(nq - \mathring{x}_i + \tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{\mathring{x}_i}{nq}\right)
\end{aligned}$$

Le théorème de Jacques Bernoulli[3] stipule que lors d'un grand nombre d'expériences, la fréquence d'un évènement converge en probabilité vers la probabilité de cet évènement.

Par exemple lors de n tirages on sort x boules blanches. Alors, lorsque n devient grand, la fréquence x/n de l'évènement sortir une boule blanche tend vers p.

3. Voir Théorème central limite.pdf

Nous nous plaçons donc dans le cas le plus probable :

$$\begin{aligned}\frac{x}{n} &\approx p\\ x &\approx np\end{aligned}$$

la variable x étant maintenant un rationnel. Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\mathring{x}}{np} &= \frac{x-np}{np}\\ &\approx 0\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\mathring{x}}{nq} &= \frac{\mathring{x}}{n(1-p)}\\ &= \frac{\mathring{x}}{np} \times \frac{p}{1-p}\\ &\approx 0\end{aligned}$$

par conséquent on peut utiliser le développement limité à l'ordre deux du logarithme népérien. Pour ε petit :

$$\begin{aligned}\ln(1+\varepsilon) &\approx \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\\ \ln\left(1+\frac{\mathring{x}}{np}\right) &\approx \frac{\mathring{x}}{np} - \frac{\mathring{x}^2}{2n^2p^2}\\ \ln\left(1-\frac{\mathring{x}}{nq}\right) &\approx -\frac{\mathring{x}}{nq} - \frac{\mathring{x}^2}{2n^2q^2}\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}(X=x) \approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \left(np+\mathring{x}+\tfrac{1}{2}\right)&\left(\frac{\mathring{x}}{np} - \frac{\mathring{x}^2}{2n^2p^2}\right)\\ - \left(nq-\mathring{x}+\tfrac{1}{2}\right)&\left(-\frac{\mathring{x}}{nq} - \frac{\mathring{x}^2}{2n^2q^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}(X=x) \approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \cancel{\mathring{x}} - \frac{\mathring{x}^2}{np} - \frac{\mathring{x}}{2np} + \frac{\mathring{x}^2}{2np} + \frac{\mathring{x}^3}{2n^2p^2} + \frac{\mathring{x}^2}{4n^2p^2}\\ + \cancel{\mathring{x}} - \frac{\mathring{x}^2}{nq} + \frac{\mathring{x}}{2nq} + \frac{\mathring{x}^2}{2nq} - \frac{\mathring{x}^3}{2n^2q^2} + \frac{\mathring{x}^2}{4n^2q^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}(X=x) \approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{\mathring{x}}{2np} - \frac{\mathring{x}^2}{2np} + \frac{\mathring{x}^3}{2n^2p^2} + \frac{\mathring{x}^2}{4n^2p^2}\\ + \frac{\mathring{x}}{2nq} - \frac{\mathring{x}^2}{2nq} - \frac{\mathring{x}^3}{2n^2q^2} + \frac{\mathring{x}^2}{4n^2q^2}\end{aligned}$$

$$\ln \mathbb{P}(X=x) \approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{\mathring{x}}{2n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) - \frac{\mathring{x}^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) + \frac{\mathring{x}^3}{2n^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right) + \frac{\mathring{x}^2}{4n^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)$$

Nous avons également :

$$\frac{\mathring{x}}{n} = \frac{x-np}{n} \approx 0$$

autrement dit :

$$\frac{\mathring{x}}{n} \ll 1$$

En multipliant par $\mathring{x}^2/(2n)$ qui est positif :

$$\frac{\mathring{x}^3}{2n^2} \ll \frac{\mathring{x}^2}{2n}$$

n étant grand, nous avons aussi :

$$\frac{\mathring{x}^2}{4n^2} \ll \frac{\mathring{x}^2}{2n}$$

Les deux derniers termes sont donc négligeables par rapport au troisième :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}(X=x) &\approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{\mathring{x}}{2n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) - \frac{\mathring{x}^2}{2n}\left(\frac{p+q}{pq}\right)\\ &\approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{\mathring{x}(q-p)}{2npq} - \frac{\mathring{x}^2}{2npq}\end{aligned}$$

On admettra que la différence entre le nombre de boules blanches tirées et l'espérance mathématique $\mathring{x} = x - \bar{x}$ tend vers l'infini avec n. Comme $-1 \leqslant q-p \leqslant 1$ cela implique que $\mathring{x} \gg q-p$, et par conséquent le deuxième terme est négligeable devant le troisième :

$$\ln \mathbb{P}(X=x) \approx -\tfrac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{\mathring{x}^2}{2npq}$$

$$\mathbb{P}(X=x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{\mathring{x}^2}{2npq}}$$

En utilisant les variables $\bar{x} = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$:

$$\mathbb{P}(X=x) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

qui est l'expression de la densité de probabilité de la loi normale, d'espérance mathématique $\bar{x}$ et de variance σ^2. Cette loi est aussi appelée loi de Gauss, loi de Laplace-Gauss, Gaussienne, ou courbe en cloche. On la note $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$.

Elle permet d'approximer la loi binomiale lorsque :

$$\begin{cases} n \gg 1 \\ x \gg 1 \\ n - x \gg 1 \\ x \approx \bar{x} \end{cases}$$

donc pour p pas trop petit et x pas trop loin de la moyenne. □

2.2. **La loi normale est normalisée.** On pose

$$\alpha = (2\sigma^2)^{-1}$$

et l'on effectue le changement de variable :

$$t = x - \bar{x}$$

donc $dt = dx$, et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt$$

On utilise l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\sigma^2\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.3. **Représentation graphique.** La fonction $\mathbb{P}(X)$ est positive, elle tend vers zéro en $-\infty$ et en $+\infty$. Elle est paire, $\mathbb{P}(\mathring{X}) = \mathbb{P}(-\mathring{X})$, pour la variable aléatoire $\mathring{X}$ donc symétrique par rapport à la droite verticale passant par $\bar{x}$.

Posons

$$\begin{cases} A = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \\ B = (2\sigma^2)^{-1} \\ Y = X - \bar{X} \end{cases}$$

$y = x - \bar{x}$, donc $dy = dx$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) &= Ae^{-By^2} \\ \frac{d\mathbb{P}(Y = y)}{dy} &= -2ABye^{-By^2} \\ \frac{d\mathbb{P}(X = x)}{dx} &= -2AB(x - \bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2} \end{aligned}$$

Etudions le signe de la dérivée (A et B sont positifs) :

$$\begin{aligned} -2AB(x-\bar{x})e^{-B(x-\bar{x})^2} &\geqslant 0 \\ x-\bar{x} &\leqslant 0 \\ x &\leqslant \bar{x} \end{aligned}$$

Or :

$$\mathbb{P}(X=\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

La dérivée s'annule et change de signe au point de coordonnées $(\bar{x}, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$. La loi normale est maximale en ce point.

Calculons la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}(Y=y)}{dy} &= -2AByе^{-By^2} \\ \frac{d^2\mathbb{P}(Y=y)}{dy^2} &= -2ABe^{-By^2} + 4AB^2y^2e^{-By^2} \end{aligned}$$

Etudions son signe :

$$\begin{aligned} 4AB^2(x-\bar{x})^2e^{-B(x-\bar{x})^2} - 2ABe^{-B(x-\bar{x})^2} &\geqslant 0 \\ 2B(x-\bar{x})^2 - 1 &\geqslant 0 \\ (x-\bar{x})^2 &\geqslant \frac{1}{2B} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-\bar{x} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2B}} \\ x-\bar{x} \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2B}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \bar{x}+\sigma \\ x \leqslant \bar{x}-\sigma \end{cases}$$

La dérivée seconde s'annule et change de signe aux points d'abscisses $\bar{x}+\sigma$ et $\bar{x}-\sigma$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=\bar{x}\pm\sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0,607\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Les points de coordonnées $(\bar{x}\pm\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}})$ sont les points d'inflexion de la fonction $\mathbb{P}(X=x)$. La largeur de la gaussienne est de 2σ à $60,7\%$ de la hauteur.

Le rapport hauteur sur largeur est fonction uniquement de σ :

$$\frac{hauteur}{largeur} = \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi}}$$

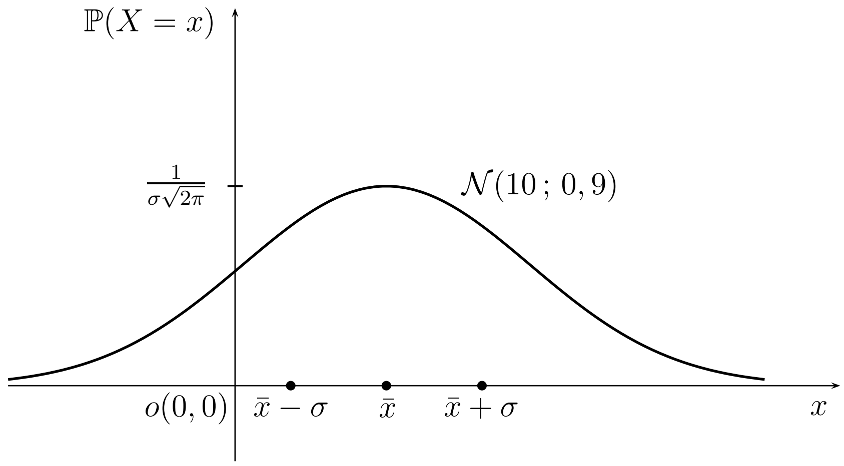

FIGURE 1. La loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma^2)$

Cherchons la largeur à mi-hauteur :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \\
-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} &= -\ln 2 \\
x - \bar{x} &= \sigma\sqrt{2\ln 2}
\end{aligned}$$

La largeur à mi-hauteur vaut $2\sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 2,355\,\sigma$.

3. La loi de Poisson

3.1. **Établissement de la loi de Poisson.** Considérons le cas d'un évènement rare en supposant que le nombre de boules blanches tirées soit petit devant n :

$$x_i \ll n$$

Nous pouvons alors simplifier l'expression de la loi binomiale :

$$\begin{aligned}
C_n^{x_i} &\triangleq \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!} \\
&= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n - x_i + 1)}{x_i!} \\
&\approx \frac{n^{x_i}}{x_i!}
\end{aligned}$$

Le logarithme de la probabilité s'écrit :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &= \ln \left[\frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i}\right] \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!}\, p^{x_i}\, q^{n-x_i}\right) \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!}\right) + x_i \ln p + (n-x_i)\ln(1-p)\end{aligned}$$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire que la proportion p de boules blanches est très petite (p est un paramètre fixé avant l'expérience) :

$$p \ll 1$$

On effectue le développement limité à l'ordre un du logarithme népérien :

$$\begin{aligned}\ln \mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!}\right) + x_i \ln p + (n-x_i)(-p) \\ &\approx \ln \left(\frac{n^{x_i}}{x_i!}\right) + x_i \ln p - np\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(X = x_i) &\approx \frac{n^{x_i}}{x_i!}\, p^{x_i}\, e^{-np} \\ &\approx \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\, e^{-\lambda}\end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = np$.

3.2. **La loi de Poisson est normalisée.**

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_i(x_i) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\end{aligned}$$

or le développement en série entière d'exponentielle s'écrit :

$$e^{\lambda} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

d'où, lorsque n devient grand :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_i(x_i) &= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= 1\end{aligned}$$

4. Applications

4.1. **Exemple 1.** Soit une urne contenant 8% de boules blanches ($p = 0,08$) et 92% de boules noires ($q = 0,92$). On tire au hasard $n = 500$ boules avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées parmi ces 500. Quelle est la probabilité de tirer 39 boules blanches ?

(1) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(500\,;\,0,08)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x\,(1-p)^{n-x} \\
\mathbb{P}(X = 39) &= \frac{500!}{39!461!} \times 0,08^{39} \times 0,92^{461} \\
&= \frac{500}{39} \times \frac{499}{38} \times \cdots \times \frac{462}{1} \times 0,08^{39} \times 0,92^{461} \\
&= 0,0655
\end{aligned}$$

(2) Nous avons :

$$\begin{cases} 500 \gg 1 \\ 39 \gg 1 \\ 461 \gg 1 \end{cases}$$

Nous pouvons approximer la loi binomiale par une loi normale de paramètres :

$$\begin{cases} \bar{x} = np = 40 \\ \sigma^2 = np(1-p) = 36,8 \end{cases}$$

Soit donc la loi normale $\mathcal{N}(40\,;\,36,8)$. La variable aléatoire X suit approximativement cette loi. Posons Y la variable aléatoire qui suit précisément cette loi, et soit T la variable aléatoire telle que :

$$T = \frac{Y - 40}{\sqrt{36,8}}$$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 39) &\approx p(Y = 39) \\
&\approx p(38,5 \leqslant Y \leqslant 39,5) \\
&\approx p\left(\frac{38,5 - 40}{\sqrt{36,8}} \leqslant T \leqslant \frac{39,5 - 40}{\sqrt{36,8}}\right) \\
&\approx p(-0,247 \leqslant T \leqslant -0.083)
\end{aligned}$$

Soit $\pi(t)$ la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= p(T \leqslant t)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X = 39) \approx \pi(-0.083) - \pi(-0,247)$$

On trouve facilement sur internet la table des valeurs de $\pi(t)$ mais elle n'est tabulée que pour $t \geqslant 0$. La loi normale étant normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \int_{\tau}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

$$p(T \leqslant \tau) + p(T \geqslant \tau) = 1$$

$$p(T \leqslant \tau) = 1 - p(T \geqslant \tau)$$

En posant $\tau = -t$:

$$p(T \leqslant -t) = 1 - p(T \geqslant -t)$$

par symétrie par rapport à $t = 0$ de la loi normale centrée :

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-t}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$p(T \leqslant t) = p(T \geqslant -t)$$

d'où :

$$p(T \leqslant -t) = 1 - p(T \leqslant t)$$

$$\pi(-t) = 1 - \pi(t)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 39) &\approx 1 - \pi(0,083) - [1 - \pi(0,247)] \\ &\approx \pi(0,247) - \pi(0,083)\end{aligned}$$

On utilise la table des valeurs de $\pi(t)$ pour trouver $\pi(0,247)$:

$$\begin{cases} \pi(0,24) \approx 0,5948 \\ \pi(0,25) \approx 0,5987 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \dfrac{0,5987 - 0,5948}{0,25 - 0,24} \\ b = 0,5987 - a \times 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,3900 \\ b = 0,5012 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\pi(0,247) &\approx 0,39 \times 0,247 + 0,5012 \\ &\approx 0,5975\end{aligned}$$

On utilise de nouveau la table pour trouver $\pi(0,083)$:

$$\begin{cases} \pi(0,08) \approx 0,5319 \\ \pi(0,09) \approx 0,5359 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \dfrac{0,5359 - 0,5319}{0,09 - 0,08} \\ b = 0,5359 - a \times 0,09 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,0400 \\ b = 0,4999 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(0,083) &\approx 0,4 \times 0,083 + 0,4999 \\ &\approx 0,5331 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 39) &\approx 0,5975 - 0,5331 \\ &\approx 0,0644 \end{aligned}$$

(3) En approximant la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 40$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x) &\approx \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \\ \mathbb{P}(X = 39) &\approx \frac{40^{39}}{39!}\, e^{-40} \\ &\approx 2,674 \times 10^{-19} \end{aligned}$$

L'approximation par la loi de Poisson n'est pas valide car nous n'avons pas $x \ll n$.

4.2. **Exemple 2.** Soit une urne contenant 3% de boules blanches ($p = 0,03$) et 97% de boules noires ($q = 0,97$). On tire au hasard $n = 100$ boules avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées parmi ces 100.

(1) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule blanche de tirée ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;\,0,03)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \frac{100!}{0!100!} \left(\frac{3}{100}\right)^0 \left(\frac{97}{100}\right)^{100} \\ &= 0,97^{100} \\ &= 0,0476 \end{aligned}$$

(b) $0 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &\approx \frac{3^0}{0!}\, e^{-3} \\ &\approx 0,0498 \end{aligned}$$

(c) Approximons la loi binomiale par la loi normale de paramètres :

$$\begin{cases} \bar{x} = 3 \\ \sigma^2 = 2,91 \end{cases}$$

Soit donc la loi normale $\mathcal{N}(3\,;\,2,91)$. La variable aléatoire X suit approximativement cette loi. Posons Y la variable aléatoire qui suit précisément cette loi, et soit T la variable aléatoire telle que :

$$T = \frac{Y-3}{\sqrt{2,91}}$$

T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &\approx p(Y=0) \\
&\approx p(-0,5 \leqslant Y \leqslant 0,5) \\
&\approx p\left(\frac{-0,5-3}{\sqrt{2,91}} \leqslant T \leqslant \frac{0,5-3}{\sqrt{2,91}}\right) \\
&\approx p(-2,052 \leqslant T \leqslant -1,466) \\
&\approx \pi(-1,466) - \pi(-2,052) \\
&\approx 1 - \pi(1,466) - [1 - \pi(2,052)] \\
&\approx \pi(2,052) - \pi(1,466)
\end{aligned}$$

On utilise la table pour trouver $\pi(2,052)$:

$$\begin{cases} \pi(2,05) \approx 0,9798 \\ \pi(2,06) \approx 0,9803 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \dfrac{0,9803 - 0,9798}{2,06 - 2,05} \\ b = 0,9803 - a \times 2,06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,0500 \\ b = 0,8773 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\pi(2,052) &\approx 0,05 \times 2,052 + 0,8773 \\
&\approx 0,9799
\end{aligned}$$

On utilise de nouveau la table pour trouver $\pi(1,466)$:

$$\begin{cases} \pi(1,46) \approx 0,9279 \\ \pi(1,47) \approx 0,9292 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \dfrac{0,9292 - 0,9279}{1,47 - 1,46} \\ b = 0,9292 - a \times 1,47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,1300 \\ b = 0,7381 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(1,466) &\approx 0,13 \times 1,466 + 0,7381 \\ &\approx 0,9287 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &\approx 0,9799 - 0,9287 \\ &\approx 0,0512 \end{aligned}$$

(2) Quelle est la probabilité qu'il y ait une seule boule blanche de tirée ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,; 0,03)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{100!}{1!99!}\left(\frac{3}{100}\right)^1\left(\frac{97}{100}\right)^{99} \\ &= 3 \times 0,97^{99} \\ &= 0,1471 \end{aligned}$$

(b) $1 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{3^1}{1!}\, e^{-3} \\ &= 0,1494 \end{aligned}$$

(c) Approximons la loi binomiale par la loi normale $\mathcal{N}(3\,; 2,91)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &\approx p(Y = 1) \\ &\approx p(0,5 \leqslant Y \leqslant 1,5) \\ &\approx p\left(\frac{0,5-3}{\sqrt{2,91}} \leqslant T \leqslant \frac{1,5-3}{\sqrt{2,91}}\right) \\ &\approx p(-1,466 \leqslant T \leqslant -0,879) \\ &\approx \pi(-0,879) - \pi(-1,466) \\ &\approx 1 - \pi(0,879) - [1 - \pi(1,466)] \\ &\approx \pi(1,466) - \pi(0,879) \end{aligned}$$

Nous avons déjà calculer $\pi(1,466)$:

$$\pi(1,466) \approx 0,9287$$

On utilise la table pour trouver $\pi(0,879)$:

$$\begin{cases} \pi(0,87) \approx 0,8078 \\ \pi(0,88) \approx 0,8106 \end{cases}$$

On effectue une interpolation affine :

$$\begin{cases} a = \dfrac{0,8106 - 0,8078}{0,88 - 0,87} \\ b = 0,8106 - a \times 0,88 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,2800 \\ b = 0,5642 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(0,879) &\approx 0,28 \times 0,879 + 0,5642 \\ &\approx 0,8103 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &\approx 0,9287 - 0,8103 \\ &\approx 0,1184 \end{aligned}$$

L'approximation par une loi normale n'est pas bonne car nous n'avons pas $x \gg 1$.

(3) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de deux boules blanches de tirées ?

(a) En utilisant la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;\,0,03)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{100!}{2!98!}\left(\frac{3}{100}\right)^2\left(\frac{97}{100}\right)^{98} \\ &= \frac{100 \times 99}{2} \times \frac{9}{100^2} \times 0,97^{98} \\ &= 0,2252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 2) &= 1 - \mathbb{P}(0) - \mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(2) \\ &= 1 - 0,0476 - 0,1471 - 0,2252 \\ &= 0,5801 \end{aligned}$$

(b) $2 \ll 100$, nous pouvons approximer la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{3^2}{2!}\,e^{-3} \\ &= 0,2240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 2) &= 1 - \mathbb{P}(0) - \mathbb{P}(1) - \mathbb{P}(2) \\ &= 1 - 0,0498 - 0,1494 - 0,2240 \\ &= 0,5768 \end{aligned}$$

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/