MÉCANIQUE CLASSIQUE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. A partir d'expériences ou d'observations, la physique consiste à établir des hypothèses (raisonnement par induction) pour modéliser la nature, et à en tirer des conséquences (raisonnement par déduction) par une démonstration (succession d'inférences logiques). La mécanique générale peut être construite à partir d'axiomes successifs de plus en plus puissants, le dernier incluant tous ceux qui le précèdent.

Table des matières

1. Principe d'inertie

Expérience 1.1. L'expérience montre que lorsqu'un corps ou un système constitué par un ensemble de corps, est mis en mouvement sur une surface plane, la distance parcourue est d'autant plus grande que l'on a réduit les frottements. Nous supposerons qu'à la limite où les frottements de contact et les frottements de l'air sont nuls, la distance

Date: 20 octobre 2015.

parcourue devient infinie et le vecteur vitesse du corps ou du système ne varie pas.

Axiome 1.1. *Principe d'inertie en translation*
Tout système isolé, c'est-à-dire n'ayant aucune interaction avec un autre système, se déplace à vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ *constant ou nul :*

$$\boldsymbol{v}_{système\ isolé} = \boldsymbol{C}^{ste}$$

Nous verrons que cet axiome[1] peut être remplacé par des axiomes plus puissants, et, bien qu'il devienne alors un théorème[2], nous continuerons de l'appeler « principe » pour des raisons historiques. Les axiomes suivants seront à leur tour remplacés par des axiomes plus puissants au fur et à mesure que nous construirons la mécanique. Présentés comme des axiomes, ils deviendront des théorèmes, sauf pour le dernier.

2. Masse inerte et quantité de mouvement

Expérience 2.1. L'expérience montre que lors d'un choc, et plus généralement lors de toute interaction, la variation du vecteur vitesse du premier corps est proportionnelle et opposée à la variation du vecteur vitesse du second corps.

Par conséquent, nous faisons l'hypothèse que les vecteurs variation de vitesse $\Delta\boldsymbol{v}_1$ et $\Delta\boldsymbol{v}_2$ sont colinéaires :

$$\Delta\boldsymbol{v}_1 = -k\Delta\boldsymbol{v}_2 \tag{1}$$

où k est un réel positif supposé indépendant[3] de $\boldsymbol{v}_1$ et de $\boldsymbol{v}_2$. Désignons le corps 1 comme corps de référence, et faisons le interagir avec les autres corps. Les coefficients de proportionnalité sont alors notés m_2, m_3, etc.

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{v}_1 &= -m_2\Delta\boldsymbol{v}_2 \\ \Delta\boldsymbol{v}_1 &= -m_3\Delta\boldsymbol{v}_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

Lorsqu'on fait interagir les corps 2 et 3 par exemple, on constate que :

$$m_2\Delta\boldsymbol{v}_2 = -m_3\Delta\boldsymbol{v}_3$$

Les coefficients m_2, m_3, etc. sont appelés masses inertes des corps 2, 3, etc. La masse inerte du corps 1 est prise égale à l'unité, $m_1 = 1$.

1. Un axiome est une proposition non démontrable, à la base d'un système hypothético-déductif. Dans le langage courant, axiome est synonyme d'hypothèse, de principe, ou de postulat.
2. Un théorème est une proposition démontrable à partir d'axiomes.
3. En relativité, k est fonction de la vitesse relative $(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$ avant l'interaction.

2.1. **Masse inerte.** La masse inerte est un coefficient que l'on associe à la quantité de matière contenue dans un corps. Ce coefficient se mesure en faisant se percuter, ou interagir, deux corps. On désigne un corps de référence qui aura une masse inerte unité, avec laquelle les masses inertes des autres corps sont comparées.

Définition 2.1. *Masse inerte*
La masse inerte mesure la résistance d'un corps au changement de son état de mouvement.

2.2. **Quantité de mouvement.**

Définition 2.2. *Quantité de mouvement*
La quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ d'un corps est le produit de sa masse inerte m par son vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p} \stackrel{\Delta}{=} m\boldsymbol{v}$$

De façon plus précise, il faudrait parler de ≪ quantité de mouvement en translation ≫, car nous verrons qu'il existe une ≪ quantité de mouvement en rotation ≫. La variation de quantité de mouvement se décompose en deux termes :

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{p} &= \Delta(m\boldsymbol{v}) \\ &= m\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta m \end{aligned} \tag{3}$$

Lorsque la masse est constante ($\Delta m = 0$), nous avons :

$$\Delta\boldsymbol{p} = m\Delta\boldsymbol{v}$$

En supposant la masse constante, l'équation (2) dans laquelle $m_1 = 1$, se réécrit :

$$\Delta\boldsymbol{p}_1 = -\Delta\boldsymbol{p}_2 \tag{4}$$

L'interaction entre deux corps correspond alors à un échange de quantité de mouvement. Si l'on note $\boldsymbol{p}$ la quantité de mouvement avant le choc, et $\boldsymbol{p}'$ celle après le choc, l'équation (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'_1 - \boldsymbol{p}_1 &= -(\boldsymbol{p}'_2 - \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

La quantité de mouvement totale du système formé des corps 1 et 2 se conserve au cours du temps. En généralisant, on peut énoncer l'axiome suivant :

Axiome 2.1. *La quantité de mouvement totale d'un système isolé constitué de n corps se conserve au cours du temps.*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{C}^{ste}$$

En partant d'une nouvelle expérience, nous avons obtenu l'axiome 2.1 de conservation de la quantité de mouvement, qui inclut l'axiome 1.1 du principe d'inertie : la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ et la masse inerte m d'un système isolé étant constants, son vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est contant.

2.3. **Remarque.**
Dans l'équation (3), le terme $\boldsymbol{v}\Delta m$ correspond à une variation de quantité de mouvement, au même titre que le terme $m\Delta\boldsymbol{v}$. Il correspond à la réunion ou à la désunion de deux systèmes ayant le même vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$, que l'on peut toujours voir comme une variation de masse de l'un des deux systèmes. Soient deux systèmes, 1 et 2, ayant le même vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$, leurs quantités de mouvement s'écrivent :

$$\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}$$

En faisant l'hypothèse que la masse inerte se conserve, nous pouvons considérer le système global formé par la réunion des deux systèmes :

$$\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v} + m_2\boldsymbol{v}$$
$$\boldsymbol{p} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}$$

et nous pouvons aussi considérer que le système 1 a gagné la quantité de mouvement $\Delta\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$, en gagnant la masse $\Delta m_1 = m_2$

$$\Delta\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{v}\Delta m_1$$

De même, en se plaçant du point de vue du système 2

$$\Delta\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{v}\Delta m_2$$

Par conséquent, l'axiome 2.1 est aussi applicable lors d'échanges de masse dans un système isolé.

3. Relation fondamentale de la dynamique

Nous avons vu que la quantité de mouvement totale d'un système isolé se conserve au cours du temps. Lorsque le système n'est plus isolé et que nous agissons dessus, par exemple en le poussant ou en le tirant, nous faisons varier sa quantité de mouvement dans le temps. Nous dirons que nous exerçons une force sur ce système.

En considérant d'abord un corps unique, nous posons la définition suivante :

Définition 3.1. *Force s'exerçant sur un corps*
La force s'exerçant sur un corps est la dérivée totale par rapport au temps de la quantité de mouvement de ce corps :

$$\boldsymbol{f} \triangleq \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Lorsque la force $\boldsymbol{f}$ s'exerce sur un système constitué de n corps, elle peut s'exercer sur n'importe lequel de ces n corps, faisant varier la quantité de mouvement totale $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$ du système :

Définition 3.2. *Force*
La force s'exerçant sur un système constitué de n corps est la dérivée totale par rapport au temps de la quantité de mouvement totale de ce système :

$$\boldsymbol{f} \triangleq \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$$

Lorsque m forces s'exercent en même temps sur un système de n corps, celles-ci sont indépendantes les unes des autres, et l'on peut les additionner vectoriellement :

Définition 3.3. *Somme de forces*
La somme des forces s'exerçant sur un système constitué de n corps est la dérivée totale par rapport au temps de la quantité de mouvement totale de ce système :

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{f}_j \triangleq \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$$

3.1. **Action-réaction.** L'équation (4) étant valable quelle que soit la durée de l'interaction, nous pouvons l'écrire sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{p}_1 &= -d\boldsymbol{p}_2 \\ \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} &= -\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} \\ \boldsymbol{f}_1 &= -\boldsymbol{f}_2 \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Loi de l'action-réaction*
La force exercée par le corps 1 sur le corps 2 est égale et opposée à celle exercée par le corps 2 sur le corps 1.

Ainsi, pour le système constitué des corps 1 et 2, la somme des forces intérieures est nulle, $\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = \mathbf{0}$. Pour un système de n corps, en les considérant deux à deux on déduit que la somme des forces intérieures à tout système est nulle :

$$\sum \boldsymbol{f}^{\,int} = \mathbf{0}$$

Dans la définition 3.3, il ne reste alors plus que les forces extérieures :

Définition 3.4. *Forces extérieures*
La somme des forces extérieures s'exerçant sur un système constitué

de n corps est la dérivée totale par rapport au temps de la quantité de mouvement totale de ce système :

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{f}_j^{\,ext} \triangleq \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$$

Définition 3.5. *Modèle de force*
On appelle modèle de force, noté $\boldsymbol{F}$, la représentation théorique d'une force physique réelle $\boldsymbol{f}$.

Par exemple, le modèle de force d'un ressort dans sa partie linéaire est $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x}$, la force étant supposée proportionnelle et de sens contraire à l'allongement du ressort. Nous savons que ceci n'est qu'une approximation.

La définition 3.4 devient une équation dont on peut chercher une solution, lorsque l'on remplace chaque force $\boldsymbol{f}$ s'exerçant sur le système par un modèle de force $\boldsymbol{F}$ adapté au problème que l'on traite :

Axiome 3.1. *Relation fondamentale de la dynamique*
La somme des modèles des forces extérieures à un système est égale à la dérivée totale par rapport au temps de la quantité de mouvement totale du système :

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{F}_j^{\,ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$$

Ce nouvel axiome inclut l'axiome 2.1 de la conservation de la quantité de mouvement : lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur un système, $\sum \boldsymbol{F}^{\,ext} = 0$, sa quantité de mouvement se conserve, $\sum \boldsymbol{p} = \boldsymbol{C}^{ste}$.

4. Masse grave

La masse grave ou masse pesante est un coefficient que l'on associe à la quantité de matière contenue dans un corps. Ce coefficient se mesure par exemple par l'intermédiaire d'une balance de Roberval ou d'un dynamomètre, qui nous donnent le poids du corps, et qui dépend de l'endroit sur Terre où l'on se trouve. Par contre, le rapport des poids de deux corps est indépendant du lieu et des autres conditions extérieures. Pour que la masse grave soit un coefficient intrinsèque au corps, autrement dit pour qu'il ne dépende pas des conditions extérieures, nous sommes amenés à définir le rapport des masses de deux corps comme égal au rapport constant de leurs poids. On désigne alors un corps de référence qui aura une masse grave unité, avec lequel les masses graves des autres corps sont comparées.

Définition 4.1. *Masse grave*
La masse grave m_g d'un corps mesure l'intensité du champ gravitationnel créé par ce corps (rôle actif), et la réponse de ce corps aux champs gravitationnels créés par d'autres corps (rôle passif).

Par conséquent, le modèle de force utilisé pour la force de gravitation est le suivant :

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{m_{g_1} m_{g_2}}{r^3}\,\boldsymbol{r}$$

où $G \approx 6,670 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ est appelée constante de gravitation. Cette force est supposée inversement proportionnelle à la distance au carré. En effet, le champ gravitationnel se propage de manière isotrope, selon une sphère, et son intensité décroit en raison inverse de l'expansion en r^2 de la surface de cette sphère. En utilisant l'axiome 3.1 de la relation fondamentale de la dynamique, pour un corps tombant à la surface de la Terre $\oplus$, nous avons l'équation :

$$\begin{aligned} -G\,\frac{m_g m_{g\oplus}}{r^3}\,\boldsymbol{r} &= \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \\ -G\,\frac{m_g m_{g\oplus}}{r^3}\,\boldsymbol{r} &= m\,\boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{6}$$

Expérience 4.1. L'expérience montre que, si l'on se place dans le vide pour s'affranchir des frottements de l'air, tous les corps tombent avec la même accélération $\boldsymbol{a}$, indépendamment de leurs masses graves m_g ou de leurs masses inertes m.

Cela signifie que l'on peut simplifier l'égalité (6) par m et m_g. On garde la même constante G si l'on choisi le même corps de référence pour la masse inerte et la masse grave, et nous avons alors :

$$-G\,\frac{m_{g\oplus}}{r^3}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$$

et, tant qu'aucune expérience ne montre le contraire :

$$m_{inerte} = m_{grave}$$

5. Travail et énergie

Nous pouvons intégrer l'équation fondamentale de la dynamique, axiome 3.1, par rapport à l'espace parcouru $[AB]$, sans perte de généralité :

$$\int_A^B \boldsymbol{F}^{\,ext} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{7}$$

5.1. Travail.

Définition 5.1. *Travail*
Le travail W (work) d'une force est l'intégrale sur le trajet de cette force. Nous calculerons toujours le travail à partir d'un modèle de force :

$$W \triangleq \int_A^B \boldsymbol{F}^{\,ext} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Pour intégrer le membre de gauche de l'équation (7), nous faisons l'hypothèse que le modèle de force $\boldsymbol{F}^{\,ext}$ dérive d'une énergie potentielle E_p. Nous verrons au paragraphe 5.4 que l'on dit aussi que les forces $\boldsymbol{F}^{\,ext}$ sont conservatives.

5.2. **Energie potentielle.**

Définition 5.2. *Energie potentielle*
Un modèle de force dérive d'une énergie potentielle E_p lorsqu'on peut écrire l'égalité :

$$\boldsymbol{F}^{\,ext} = -\nabla E_p$$

∇ est l'opérateur vectoriel nabla, de coordonnées $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Lorsqu'il est appliqué directement à une fonction scalaire, il prend le nom de gradient de cette fonction, $\nabla E_p(\partial_x E_p, \partial_y E_p, \partial_z E_p)$. On dit aussi que la force dérive d'un potentiel scalaire. L'opérateur gradient est une dérivée spatiale tridimensionnelle. Il donne le taux de variation d'une fonction scalaire selon chacune des trois directions de l'espace.

Le signe négatif rend compte du fait que la force est dirigée selon les potentiels décroissants.

Il faut bien sûr remplacer E_p par un modèle d'énergie potentielle adapté au problème.

Si le modèle de force dérive d'une énergie potentielle, l'intégrale curviligne de la relation fondamentale de la mécanique (7) devient :

$$\int_A^B -\nabla E_p \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{8}$$

Dans le cas général, la force dépend du temps et de la position $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$, par conséquent son énergie potentielle aussi, dont la différentielle s'écrit :

$$dE_p(\boldsymbol{r}, t) = \nabla E_p \cdot d\boldsymbol{r} + \frac{\partial E_p}{\partial t}\, dt$$

Si la force est indépendante du temps, elle dérive d'un potentiel lui aussi indépendant du temps, et nous avons :

$$dE_p(\boldsymbol{r}) = \nabla E_p \cdot d\boldsymbol{r}$$

En reprenant la relation (8) sous l'hypothèse que la force dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps :

$$\begin{aligned}
\int_A^B -dE_p &= \int_A^B \left(\frac{dm}{dt}\,\boldsymbol{v} + m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right) \cdot d\boldsymbol{r} \\
-\int_A^B dE_p &= \int_A^B \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} dm + \int_A^B m d\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\
-\left[E_p\right]_A^B &= \int_A^B v^2 dm + \int_A^B m\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Pour pouvoir intégrer le membre de droite, nous faisons l'hypothèse que la masse est constante ($dm = 0$) lors du trajet de A à B :

$$-\left[E_p\right]_A^B = \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_A^B \tag{9}$$

Lorsque le modèle de force est indépendant du temps et dérive d'un potentiel scalaire, le travail du modèle de force ne dépend plus du trajet suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée : $E_{pA} - E_{pB}$.

Démontrons la réciproque. Montrons que si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi, alors le modèle de force dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps.

Si le modèle de force dépend du temps,

$$\begin{aligned}\nabla E_p \cdot d\boldsymbol{r} &= dE_p(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial E_p}{\partial t}\,dt\\ \int_A^B -\nabla E_p \cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_A^B dE_p(\boldsymbol{r}, t) + \int_A^B \frac{\partial E_p}{\partial t}\,dt\\ &= -\left[E_p\right]_A^B + \int_A^B \frac{\partial E_p}{\partial t}\,dt\end{aligned}$$

alors le travail du modèle de force dépend du chemin suivi.

Par application de la règle d'inférence du modus tollens, si le travail du modèle de force est indépendant du trajet suivi, alors le modèle de force est indépendant du temps $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

Imaginons deux trajets pour aller de A à B, le travail effectué est le même pour chaque trajet. Si l'on utilise le premier trajet pour l'aller, et le second pour le retour, le travail à l'aller est égale et opposé à celui du retour, autrement dit il est nul le long du chemin fermé :

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left[\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\right] \cdot \boldsymbol{n}ds$$

par conséquent le vecteur rotationnel de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ (nabla vectoriel $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$) est nul,

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0}$$

Nous avons ici besoin du théorème d'analyse vectorielle suivant :

Théorème 5.1. *Pour toute fonction ϕ de dérivées partielles secondes continues (pour pouvoir intervertir les dérivées partielles), le rotationnel du gradient de la fonction ϕ est nul :*

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \phi) &= \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_x \phi \\ \partial_y & \partial_y \phi \\ \partial_z & \partial_z \phi \end{vmatrix} \\
&= (\partial_y \partial_z \phi - \partial_z \partial_y \phi)\, \boldsymbol{i} + (\partial_z \partial_x \phi - \partial_x \partial_z \phi)\, \boldsymbol{j} + (\partial_x \partial_y \phi - \partial_y \partial_x \phi)\, \boldsymbol{k} \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

□

Pour que son rotationnel soit nul, le modèle de force doit dériver d'une énergie potentielle :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla E_p(\boldsymbol{r})$$

5.3. **Energie cinétique.**

Définition 5.3. *Energie cinétique*
Le terme $\frac{1}{2}mv^2$, noté E_c, est appelé énergie cinétique.

$$E_c \triangleq \tfrac{1}{2}mv^2$$

Avec cette définition, l'équation (9) devient :

$$
\begin{aligned}
-\left[E_p\right]_A^B &= \left[E_c\right]_A^B \\
E_{p_A} - E_{p_B} &= E_{c_B} - E_{c_A} \\
E_{c_A} + E_{p_A} &= E_{c_B} + E_{p_B} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

5.4. **Energie mécanique.**

Définition 5.4. *Energie mécanique*
Le terme $E_c + E_p$, noté E_m, est appelé énergie mécanique.

$$E_m \triangleq E_c + E_p$$

Le choix du signe négatif de la définition 5.2 se retrouve ici. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Si nous avions choisi un signe positif, l'énergie potentielle serait l'opposée de la convention choisie en physique, et l'énergie mécanique serait la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Il ne s'agit là que d'une convention de définition, écrire $a + b$ ou écrire $a - (-b)$.

Avec la définition 5.4, l'équation (10) devient :

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

Théorème 5.2. *Conservation de l'énergie mécanique*
Lorsque tous les modèles de forces $\boldsymbol{F}$ dérivent chacun d'une énergie potentielle scalaire indépendante du temps $E_p(\boldsymbol{r})$, et lorsque la masse

se conserve, l'énergie mécanique E_m se conserve le long de tout trajet $[AB]$:

$$E_m = C^{ste}$$

L'énergie mécanique est la même en tout point du trajet, elle est aussi la même lorsque le système parcours le trajet, autrement dit lorsque le trajet a lieu dans le temps. L'énergie mécanique ne dépend donc pas du temps. Le système est dit *conservatif* bien que les énergies potentielles soient celles de forces extérieures au système et que l'énergie cinétique ne dépende pas du système mais de sa vitesse relativement à celui qui la mesure. Les forces extérieures dérivant d'un potentiel scalaire sont dites *conservatives* dans le sens où elles permettent la conservation de l'énergie mécanique. Si elles sont toutes conservatives alors l'énergie mécanique est une constante du mouvement, ou une intégrale première du mouvement.

La relation fondamentale de la dynamique, axiome 3.1, est une équation vectorielle qui est l'écriture condensée de trois équations scalaires, une pour chaque coordonnée d'espace. Lorsque toutes les forces sont conservatives, elle est remplacée par la seule équation scalaire du théorème 5.2 de conservation de l'énergie mécanique. Cependant cela n'est pas toujours possible car toutes les forces ne dérivent pas d'une énergie potentielle. Par exemple, il est clair que les forces de frottement dépendent du trajet suivi entre A et B. De plus, l'hypothèse de conservation de la masse n'est pas toujours applicable. Par exemple, la masse d'une fusée au décollage diminue car elle consomme du carburant qui est éjecté sous forme de gaz.

6. Inertie en rotation

Le principe d'inertie que nous avons vu au paragraphe 1 correspond à l'inertie en translation. Il existe un principe équivalent pour la rotation.

Axiome 6.1. *Principe d'inertie en rotation*
Tout système isolé, c'est à dire n'ayant aucune interaction avec un autre système, tourne sur lui-même à vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ constante ou nulle.

Nous allons chercher des axiomes plus puissants pour remplacer ce principe, qui deviendra un théorème.

7. Moment cinétique

La rotation ayant lieu par rapport à un point fixe, prenons un point quelconque O de l'espace. Cherchons quelle est la « quantité de mouvement en rotation » par rapport à ce point :

Définition 7.1. *Moment cinétique*
Le moment cinétique $\boldsymbol{L}_{/O}$ par rapport au point O, d'un corps situé

en A, est le produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{OA}$ par la quantité de mouvement de ce corps :

$$\boldsymbol{L}_{/O} \triangleq \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{p}$$

Soient $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ les rayons vecteurs de deux corps avant leur interaction, et $\boldsymbol{r}'_1$ et $\boldsymbol{r}'_2$ après leur interaction, nous faisons l'hypothèse que le moment cinétique total se conserve, quel que soit le point O de référence choisi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r'_1} \times \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{r'_2} \times \boldsymbol{p}'_2 &= \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{L}'_{1/O} + \boldsymbol{L}'_{2/O} &= \boldsymbol{L}_{1/O} + \boldsymbol{L}_{2/O} \end{aligned} \tag{11}$$

En généralisant à un système isolé constitué de n corps, on peut énoncer l'axiome suivant :

Axiome 7.1. *Conservation du moment cinétique*
Le moment cinétique total d'un système isolé constitué de n corps se conserve, quel que soit le point O choisi :

$$\forall O \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i/O} = \boldsymbol{C}^{ste}$$

Lorsque le point de référence des rayons vecteurs est envoyé à l'infini, les rayons vecteurs deviennent tous égaux, et la relation (11) s'écrit,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}'_2 &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2) &= \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \end{aligned}$$

L'axiome 7.1 de conservation du moment cinétique total inclut l'axiome 2.1 de conservation de la quantité de mouvement totale.

8. Moment de force

Nous avons posé comme nouvel axiome que le moment cinétique total d'un système isolé se conserve. Lorsque le système n'est plus isolé et que nous le faisons tourner sur lui-même ou ralentissons sa rotation, nous faisons varier son moment cinétique. Nous dirons que nous exerçons un moment de force sur le système.

Définition 8.1. *Moment de force*
Le moment de force $\boldsymbol{\tau}_{/O}$, par rapport au point O, est la dérivée totale par rapport au temps du moment cinétique par rapport au même point O, de ce corps :

$$\boldsymbol{\tau}_{/O} \triangleq \frac{d\boldsymbol{L}_{/O}}{dt}$$

En combinant cette définition avec la définition 7.1, nous obtenons une définition alternative pour le moment de force :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{/O} &\triangleq \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{p}\right)\\ &\triangleq \frac{d\boldsymbol{OA}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{OA} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\\ &\triangleq \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{f}\\ &\triangleq \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{f}\end{aligned}$$

Définition 8.2. *Moment de force*
Le moment de force par rapport au point O, de la force $\boldsymbol{f}$ s'exerçant sur un corps situé en A, est le produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{OA}$ par la force $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{\tau}_{/O} \triangleq \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{f}$$

Lorsque le moment de force par rapport à O s'exerce sur un système constitué de n corps, il peut s'exercer sur n'importe lequel de ces n corps, faisant varier le moment cinétique total $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i_{/O}}$ du système :

Définition 8.3. *Moment de force*
Le moment de force par rapport au point O, de la force $\boldsymbol{f}$ s'exerçant sur un système de n corps, est la dérivée totale par rapport au temps du moment cinétique total par rapport au même point O, de ces n corps :

$$\boldsymbol{\tau}_{/O} \triangleq \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i_{/O}}$$

Lorsque m moments de forces par rapport au point O s'exercent sur un système constitué de n corps, ils sont indépendants les uns des autres et l'on peut les additionner vectoriellement :

Définition 8.4. *Moment de force*
La somme des moments des forces par rapport au point O, s'exerçant sur un système de n corps, est la dérivée totale par rapport au temps du moment cinétique total par rapport au même point O, de ces n corps :

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\tau}_{j_{/O}} \triangleq \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i_{/O}}$$

Dans le cas d'un système isolé, en dérivant par rapport au temps l'axiome 7.1 :

$$\forall O \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i_{/O}} = \boldsymbol{0}$$

Par conséquent :

$$\forall O \quad \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\tau}_{j_{/O}} = \boldsymbol{0}$$

Nous pouvons énoncer un théorème sur les moments des forces intérieures, analogue à la loi de l'action-réaction :

Théorème 8.1. *La somme des moments des forces intérieures à tout système est nulle :*

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\tau}_{j/O}^{\,int} = \mathbf{0}$$

Définition 8.5. *Modèle de moment de force*
On appelle modèle de moment par rapport au point O d'une force, et on note $\boldsymbol{\Gamma}_{/O}$, la représentation théorique d'un moment par rapport au point O de force physique $\boldsymbol{\tau}_{/O}$. En se servant de la définition 3.5, le modèle de moment par rapport au point O d'une force s'exerçant sur un corps situé en A, est le produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{OA}$ par le modèle de force $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{/O} \triangleq \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}$$

Ainsi, le modèle d'un moment de force est le moment du modèle de cette force.

La définition 8.1 devient une équation, dont on peut chercher une solution, lorsque l'on remplace le moment de force $\boldsymbol{\tau}$ par un modèle de moment de force $\boldsymbol{\Gamma}$.

Axiome 8.1. *Théorème du moment cinétique*
La somme des moments par rapport au point O des modèles des forces extérieures à un système est égale à la dérivée totale par rapport au temps du moment cinétique total du système par rapport au même point O :

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\Gamma}_{j/O}^{\,ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_{i/O}$$

Ce nouvel axiome inclut l'axiome 7.1 de la conservation du moment cinétique total : lorsqu'aucun moment de force n'est exercé sur un système, $\sum \boldsymbol{\Gamma}^{\,ext} = \mathbf{0}$, son moment cinétique total se conserve, $\sum \boldsymbol{L}_{/O} = \boldsymbol{C}^{ste}$.

En explicitant l'axiome 8.1 grâce aux définitions 7.1 et 8.5 :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{\,ext} &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m\boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \times m\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}
\end{aligned}$$

Lorsque le point de référence des rayons vecteurs est envoyé à l'infini, les rayons vecteurs deviennent tous égaux, et l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i \\
\boldsymbol{r} \times \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \boldsymbol{r} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} \\
\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'axiome 8.1 inclut aussi l'axiome 3.1 de la relation fondamentale de la dynamique. Pour trouver les équations du mouvement d'un corps, nous pouvons appliquer deux fois l'axiome 8.1. Une première fois par rapport à un point à distance finie pour son mouvement de rotation, une seconde fois par rapport à un point à distance infinie pour son mouvement de translation.

9. Un seul axiome pour la mécanique

Nous allons montrer qu'en appliquant deux fois l'axiome 7.1 de la conservation du moment cinétique total, par rapport à deux points distincts à distances finies, on retrouve l'axiome 2.1 de la conservation de la quantité de mouvement totale. Nous avons les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{OA}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) &= \boldsymbol{C}_1^{ste} \\
\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{O'A}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) &= \boldsymbol{C}_2^{ste}
\end{aligned}$$

en soustrayant :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{OA}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) - \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{O'A}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) &= \boldsymbol{C}_3^{ste}\\
\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{OA}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{O'A}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i) &= \boldsymbol{C}_3^{ste}\\
\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{OO'} \times m_i\boldsymbol{v}_i) &= \boldsymbol{C}_3^{ste}\\
\boldsymbol{OO'} \times \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{C}_3^{ste}\\
\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{C}^{ste}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer qu'en appliquant deux fois l'axiome 8.1 par rapport à deux points distincts à distance finie, on retrouve l'axiome 3.1 de la relation fondamentale de la dynamique. Nous avons les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{OA}_j \times \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{OA}_i \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\\
\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{O'A}_j \times \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{O'A}_i \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}
\end{aligned}$$

en soustrayant :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{OA}_j - \boldsymbol{O'A}_j) \times \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{OA}_i - \boldsymbol{O'A}_i) \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\\
\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{OO'} \times \boldsymbol{F}_j^{ext} &= \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{OO'} \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\\
\boldsymbol{OO'} \times \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{F}_j^{ext} &= \boldsymbol{OO'} \times \sum_{i=1}^{n}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}\\
\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{F}_j^{ext} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}
\end{aligned}$$

Par conséquent, toute la mécanique générale peut être établie par la double application de l'axiome 8.1. Cet axiome, fâcheusement appelé « théorème du moment cinétique », peut alors servir d'unique axiome de départ pour la mécanique.

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/