LE PENDULE BALISTIQUE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Le pendule balistique permet de mesurer la vitesse d'un projectile.

Table des matières

1. Pendule balistique simple

1.1. Description.

Un solide (S) de masse M et de centre de gravité G, au repos dans le référentiel terrestre (o, x, y), est suspendu en o par l'intermédiaire d'une corde.

A l'instant t_1, un projectile (p) de masse m, de rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}(t)$ et de dimensions négligeables, heurte le solide avec une vitesse $\boldsymbol{v}$.

Le système étudié formé par le solide et le projectile prend alors la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Avant l'impact, de t_0 à t_1, le poids $\boldsymbol{P}_S$ du solide est équilibré par la tension $\boldsymbol{T}$ de la corde :

$$\boldsymbol{T}(t_0) = -\boldsymbol{P}_S$$

Date: 25 juin 2017.

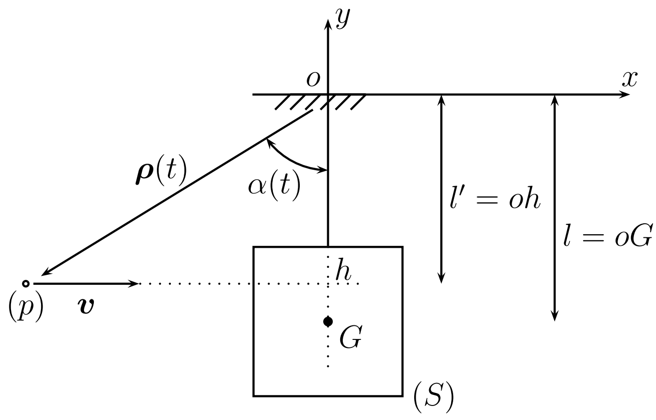


FIGURE 1. **Pendule balistique avant l'impact**

Le projectile (p) ne subit que son propre poids $\boldsymbol{P}_p$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_{(S+p)} &= \sum \boldsymbol{F}_{ext}\\ \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p\\ a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} &= -g\,\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_x = 0\\ a_y = -g\end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_x(t_0)\\ v_y(t) = -gt + v_y(t_0)\end{cases}$$

qui donne les équations de la trajectoire du projectile avant l'impact :

$$\begin{cases} x(t) = v_x(t_0)t + x(t_0)\\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y(t_0)t + y(t_0)\end{cases}$$

1.2. **Relation fondamentale de la dynamique.**
A l'instant t_1 le projectile (p) entre en contact avec le solide (S), à l'instant t_2 il s'arrête à l'intérieur du solide en $\boldsymbol{\rho}(t_2)$.

La RFD s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_{(S+p)} &= \sum \boldsymbol{F}_{ext}\\ \boldsymbol{p}_{(S+p)}(t_2) - \boldsymbol{p}_{(S+p)}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p\,dt\\ M\boldsymbol{\omega}(t_2)\times\boldsymbol{oG} + m\boldsymbol{\omega}(t_2)\times\boldsymbol{\rho}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p\,dt\end{aligned}$$

On pose $l = oG$ et $l' = \rho(t)\cos\alpha(t) = oh$ la projection de $\rho(t)$ sur l'axe vertical :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(t_2) &= -\rho(t_2)\sin\alpha(t_2)\,\boldsymbol{i} - \rho(t_2)\cos\alpha(t_2)\,\boldsymbol{j}\\ &= -\rho(t_2)[\sin\alpha(t_2)\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha(t_2)\,\boldsymbol{j}]\\ &= -l'[\tan\alpha(t_2)\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M\omega(t_2)\boldsymbol{k}\times(-l)\boldsymbol{j}+m\omega(t_2)\boldsymbol{k}\times(-l')[\tan\alpha(t_2)\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]-m[v_x(t_1)\boldsymbol{i}+v_y(t_1)\boldsymbol{j}]&\\ = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}_S+\boldsymbol{P}_p\,dt&\\ M\omega(t_2)l\boldsymbol{i} - m\omega(t_2)l'\tan\alpha(t_2)\,\boldsymbol{j} + m\omega(t_2)l'\boldsymbol{i} - mv_x(t_1)\boldsymbol{i} - mv_y(t_1)\boldsymbol{j}&\\ = \int_{t_1}^{t_2} T_x\boldsymbol{i} + T_y\boldsymbol{j} + P_{Sx}\boldsymbol{i} + P_{Sy}\boldsymbol{j} + P_{px}\boldsymbol{i} + P_{py}\boldsymbol{j}\,dt&\end{aligned}$$

$$\begin{cases} M\omega(t_2)l + m\omega(t_2)l' - mv_x(t_1) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} T_x + P_{Sx} + P_{px}\,dt\\ -\,m\omega(t_2)l'\tan\alpha(t_2) - mv_y(t_1) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} T_y + P_{Sy} + P_{py}\,dt\end{cases}$$

On suppose que le temps de l'impact la tension équilibre les poids, l'angle que fait le pendule avec la verticale reste donc très faible et :

$$\begin{cases} M\omega(t_2)l + m\omega(t_2)l' - mv_x(t_1) = 0\\ -\,m\omega(t_2)l'\tan\alpha(t_2) - mv_y(t_1) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega(t_2) = \dfrac{mv_x(t_1)}{Ml + ml'}\\ \alpha(t_2) = 0\\ v_y(t_1) = 0\end{cases}\tag{1}$$

$\alpha(t_2) = 0$: le projectile s'arrête en h sur l'axe vertical (oy).

$v_y(t_1) = 0$: la vitesse verticale du projectile est nulle au moment de l'impact, le projectile percute le solide lorsqu'il est au sommet de sa trajectoire.

1.3. **Théorème du moment cinétique.**

Le théorème du moment cinétique par rapport au point o appliqué au système $(S) + (p)$ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)} = \boldsymbol{M}_{/o}\sum\boldsymbol{F}_{ext}$$

$$\boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_2) - \boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{M}_{/o}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}_S+\boldsymbol{P}_p)dt$$

On suppose à nouveau que le temps de l'impact la tension équilibre les poids, donc l'angle que fait le pendule avec la verticale reste très faible.

Par conséquent le moment cinétique du système se conserve et $\alpha(t_2)$ et $v_y(t_1)$ sont nuls, et la relation (1) est satisfaite :

$$\boldsymbol{L}_{/o\ (S)+(p)}(t_2) = \boldsymbol{L}_{/o\ (S)+(p)}(t_1)$$

$$\boldsymbol{oG} \times M[\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{oG}] + \boldsymbol{\rho}(t_2) \times m[\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{\rho}(t_2)] = \boldsymbol{\rho}(t_1) \times m\boldsymbol{v}(t_1)$$

En notant que $\boldsymbol{\rho}(t_1) \times \boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{\rho}(t_2) \times \boldsymbol{v}(t_2) = \boldsymbol{\rho}(t_2) \times \boldsymbol{v}(t_1)$:

$$\begin{aligned} M(-l)\boldsymbol{j} \times [\omega(t_2)\boldsymbol{k} \times (-l)\boldsymbol{j}] + m\rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times [\omega(t_2)\boldsymbol{k} \times \rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2)] \\ = \rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times m[v_x(t_1)\boldsymbol{i} + v_y(t_1)\boldsymbol{j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M\omega(t_2)l^2 + m\omega(t_2)\rho^2(t_2)]\boldsymbol{k} &= m\rho(t_2)[v_x(t_1)\cos\alpha(t_2) - v_y(t_1)\sin\alpha(t_2)]\boldsymbol{k} \\ \omega(t_2)\left(Ml^2 + \frac{ml'^2}{\cos^2\alpha(t_2)}\right) &= m\rho(t_2)[v_x(t_1)\cos\alpha(t_2) - v_y(t_1)\sin\alpha(t_2)] \\ \omega(t_2) &= \frac{ml'[v_x(t_1) - v_y(t_1)\tan\alpha(t_2)]}{Ml^2 + \frac{ml'^2}{\cos^2\alpha(t_2)}} \end{aligned}$$

On pose $\alpha(t_2) = 0$:

$$\omega(t_2) = \frac{ml'v_x(t_1)}{Ml^2 + ml'^2}$$

et on égale à la relation (1) :

$$\begin{aligned} \frac{ml'v_x(t_1)}{Ml^2 + ml'^2} &= \frac{mv_x(t_1)}{Ml + ml'} \\ Mll' + ml'^2 &= Ml^2 + ml'^2 \\ l' &= l \end{aligned}$$

Le projectile doit s'arrêter dans le centre de gravité du solide. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \omega(t_2) &= \frac{mv_x(t_1)}{(M+m)l} \\ V(t_2) &= \frac{mv_x(t_1)}{M+m} \end{aligned} \tag{2}$$

A t_2 toute la quantité de mouvement $mv_x(t_1)$ est transférée à l'ensemble $(S) + (p)$. La vitesse de l'ensemble $V(t_2)$ est quasi horizontale puisque nous avons supposé que le temps de l'impact l'angle du pendule avec la verticale restait très faible. La quantité de mouvement se conserve à la condition que $l' = l$. Plus l'impact est loin du centre de gravité du solide et plus la quantité de mouvement est transférée à la Terre via la corde et la potence.

1.4. **Conservation de l'énergie mécanique.**
On choisit la position initiale du centre de gravité du système $(S)+(p)$ comme origine de l'énergie potentielle. Juste après l'impact, l'énergie potentielle du système $(S) + (p)$ est nulle et l'énergie cinétique est maximale, et vaut :

$$E_{cin}(t_2) = \frac{1}{2}(M+m)V^2(t_2)$$

On mesure la hauteur maximale H atteinte par le centre de gravité du système $(S) + (p)$ à l'instant t_3. En H, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est maximale et vaut :

$$E_{pot}(t_3) = (M+m)gH$$

En négligeant les frottements de l'air et de la corde sur l'axe, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit [1] :

$$\begin{aligned} E_{méca}(t_2) &= E_{méca}(t_3) \\ E_{cin}(t_2) + E_{pot}(t_2) &= E_{cin}(t_3) + E_{pot}(t_3) \\ \frac{1}{2}(M+m)V^2(t_2) &= (M+m)gH \\ V(t_2) &= \sqrt{2gH} \end{aligned}$$

et avec l'équation(2),

$$v(t_1) = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gH} \tag{3}$$

qui nous donne la vitesse du projectile.

1.5. **Conservation de l'énergie totale.**
On peut à présent calculer le transfert de chaleur Q du projectile (p) au solide (S) lors de l'impact. On écrit la conservation de l'énergie totale lors du transfert d'énergie cinétique au moment de l'impact :

$$Q = \frac{1}{2}mv_x^2(t_1) - \frac{1}{2}(M+m)V^2(t_2)$$

Avec l'équation (2),

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}mv_x^2(t_1) - \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2}\,v_x^2(t_1) \\ &= \frac{1}{2}mv_x^2(t_1)\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) \end{aligned}$$

1. Voir Mécanique classique.pdf

et avec l'équation(3),

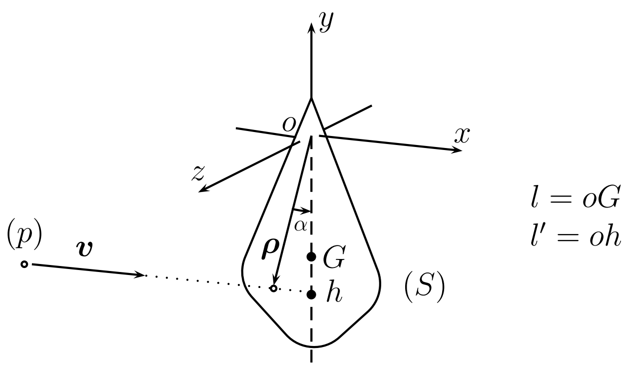
$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\frac{(M+m)^2}{m}\,2gH\left(1-\frac{m}{M+m}\right)\\ &= (M+m)\left(\frac{M+m}{m}-1\right)gH\\ &= (M+m)\,\frac{M}{m}\,gH \end{aligned}$$

2. Pendule balistique

2.1. Description.

Un solide (S) au repos dans le référentiel terrestre (o, x, y, z), peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal (oz). On désigne par M sa masse et par $J_{(oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (oz). A l'instant t_1, un projectile (p) de masse m, de rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}(t)$ et de dimensions négligeables, heurte le solide (S) avec une vitesse $\boldsymbol{v}$.

Le système étudié formé par le solide et le projectile prend alors la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}(t)$.



Le point o est le point de contact du solide (S) avec l'axe (oz). Avant l'impact, de t_0 à t_1, le poids $\boldsymbol{P}_S$ du solide est équilibré par la réaction $\boldsymbol{R}$ sur l'axe (oz) :

$$\boldsymbol{R}(t_0) = -\boldsymbol{P}_S$$

2.2. Relation fondamentale de la dynamique.

A l'instant t_1 le projectile (p) entre en contact avec le solide (S), à l'instant t_2 il s'arrête à l'intérieur du solide en $\boldsymbol{\rho}(t_2)$.

La RFD s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_{(S+p)} &= \sum \boldsymbol{F}_{ext} \\
\boldsymbol{p}_{(S+p)}(t_2) - \boldsymbol{p}_{(S+p)}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p \, dt \\
M\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{oG} + m\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{\rho}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p \, dt
\end{aligned}$$

On pose $l = oG$ et $l' = \rho(t)\cos\alpha(t) = oh$ la projection de $\rho(t)$ sur l'axe verticale. On suppose que le temps de l'impact la réaction équilibre les poids, l'angle que fait le pendule avec la verticale reste donc très faible et nous obtenons les mêmes résultats qu'au paragraphe (1.2) :

$$\begin{cases} \omega(t_2) = \dfrac{mv_x(t_1)}{Ml + ml'} \\ \alpha(t_2) = 0 \\ v_y(t_1) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

2.3. **Théorème du moment cinétique.**
De t_1 à t_2, le projectile (p) se trouve dans le solide (S).

Le théorème du moment cinétique par rapport au point o appliqué au système $(S) + (p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)} &= \boldsymbol{M}_{/o} \sum \boldsymbol{F}_{ext} \\
\boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_2) - \boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_{/o}(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{P}_S + \boldsymbol{P}_p)
\end{aligned}$$

On suppose à nouveau que le temps de l'impact la tension équilibre les poids, donc l'angle que fait le pendule avec la verticale reste très faible. Par conséquent le moment cinétique du système se conserve et $\alpha(t_2)$ et $v_y(t_1)$ sont nuls, et la relation (4) est satisfaite :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_2) &= \boldsymbol{L}_{/o\,(S+p)}(t_1) \\
J_{(oz)}\,\boldsymbol{\omega}(t_2) + \boldsymbol{\rho}(t_2) \times m[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}(t_2)] &= \boldsymbol{\rho}(t_1) \times m\boldsymbol{v}(t_1) \\
J_{(oz)}\,\omega(t_2)\boldsymbol{k} + \rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times m[\omega(t_2)\boldsymbol{k} \times \rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2)] &= \boldsymbol{\rho}(t_2) \times m\boldsymbol{v}(t_1) \\
J_{(oz)}\,\omega(t_2)\boldsymbol{k} + m\omega\rho^2\,\boldsymbol{e}_\rho \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_\rho) &= \rho(t_2)\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times m[v_x(t_1)\boldsymbol{i} + v_y(t_1)\boldsymbol{j}] \\
J_{(oz)}\,\omega(t_2)\boldsymbol{k} + m\omega(t_2)\rho^2(t_2)[(\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho)\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{e}_\rho] & \\
= m\rho(t_2)[v_x\,\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times \boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{e}_\rho(t_2) \times \boldsymbol{j}] &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(t_2)\boldsymbol{k}[J_{(oz)} + m\rho^2(t_2)] &= m\rho(t_2)[v_x(t_1)\sin(\tfrac{\pi}{2}+\alpha) + v_y(t_1)\sin(\alpha+\pi)]\boldsymbol{k} \\
\omega(t_2)[J_{(oz)} + m\rho^2(t_2)] &= m\rho(t_2)[v_x(t_1)\cos\alpha(t_2) - v_y(t_1)\sin\alpha(t_2)]
\end{aligned}$$

On pose $l' = \rho(t)\cos\alpha(t) = oh$:

$$\omega(t_2)\left(J_{(oz)} + m\,\frac{l'^2}{\cos^2\alpha}\right) = ml'[v_x(t_1) - v_y(t_1)\tan\alpha(t_2)]$$

$$\omega(t_2) = \frac{ml'[v_x(t_1) - v_y(t_1)\tan\alpha(t_2)]}{J_{(oz)} + m\,\frac{l'^2}{\cos^2\alpha(t_2)}}$$

Posons $\alpha(t_2) = 0$,

$$\omega(t_2) = \frac{ml'v_x(t_1)}{J_{(oz)} + ml'^2}$$

et égalons à l'équation (4) pour trouver la dernière condition :

$$\begin{aligned}
\frac{ml'v_x(t_1)}{J_{(oz)} + ml'^2} &= \frac{mv_x(t_1)}{Ml + ml'} \\
\frac{J_{(oz)} + ml'^2}{l'} &= Ml + ml' \\
\frac{J_{(oz)}}{l'} &= Ml \\
l' &= \frac{J_{(oz)}}{Ml}
\end{aligned}$$

Or la période du pendule pesant de moment d'inertie $J_{(oz)}$, de masse M et de longueur l s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{(oz)}}{Mgl}}$$

Celle du pendule simple de longueur l' :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

Si on égale les deux périodes on obtient :

$$l' = \frac{J_{(oz)}}{Ml}$$

Il faut donc que le projectile heurte le solide à la hauteur l' égale à celle du pendule simple synchrone avec le pendule balistique. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\omega(t_2) &= \frac{mv_x(t_1)}{\frac{J_{(oz)}}{l'} + ml'} \\
&= \frac{mv_x(t_1)}{Ml + \frac{mJ_{(oz)}}{Ml}} \\
&= \frac{mMlv_x(t_1)}{(Ml)^2 + mJ_{(oz)}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

2.4. **Conservation de l'énergie mécanique.**
On choisit la position initiale du centre de gravité du système $(S)+(p)$ comme origine de l'énergie potentielle. Juste après l'impact, l'énergie potentielle du système est nulle et l'énergie cinétique est maximale. En utilisant l'équation (5), elle s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) &= \tfrac{1}{2} J_{(oz)}\, \omega^2(t_2) + \tfrac{1}{2} m l'^2 \omega^2(t_2) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(J_{(oz)} + m l'^2\right) \left\{ \frac{m l' [v_x(t_1) - v_y(t_1) \tan\alpha(t_2)]}{J_{(oz)} + m \, \frac{l'^2}{\cos^2\alpha(t_2)}} \right\}^2 \end{aligned}$$

Avec $\alpha(t_2) = 0$,

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) &= \tfrac{1}{2}\left(J_{(oz)} + m l'^2\right) \left[\frac{m l' v_x(t_1)}{J_{(oz)} + m l'^2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{[m l' v_x(t_1)]^2}{J_{(oz)} + m l'^2} \end{aligned}$$

et $l' = J_{(oz)}/(Ml)$,

$$\begin{aligned} E_{cin}(t_2) &= \frac{1}{2} \times \frac{m^2 \left(\frac{J_{(oz)}}{Ml}\right)^2 v_x^2(t_1)}{J_{(oz)} + m \left(\frac{J_{(oz)}}{Ml}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{J_{(oz)}\, m^2 v_x^2(t_1)}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m} \end{aligned}$$

On mesure la hauteur maximale H atteinte par le centre de gravité de l'ensemble $(S)+(p)$ à l'instant t_3. En H, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est maximale. En négligeant les frottements de l'air et du solide (S) sur l'axe (oz), la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} E_{méca}(t_2) &= E_{méca}(t_3) \\ E_{cin}(t_2) + E_{pot}(t_2) &= E_{cin}(t_3) + E_{pot}(t_3) \\ \frac{1}{2} \times \frac{J_{(oz)}\, m^2 v_x^2(t_1)}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m} &= (M+m) g H \\ v_x(t_1) &= \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2(M+m) g H (M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m)}{J_{(oz)}}} \end{aligned} \tag{6}$$

2.5. **Conservation de l'énergie totale.**
On peut à présent calculer le transfert de chaleur Q du projectile (p) au solide (S) lors de l'impact. On écrit la conservation de l'énergie totale

lors du transfert d'énergie cinétique au moment de l'impact :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} m v_x^2(t_1) - \frac{1}{2} \times \frac{J_{(oz)}\, m^2 v_x^2(t_1)}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{J_{(oz)}\, m}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m}\right) m v_x^2(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{M^2 l^2}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m}\, m v_x^2(t_1) \end{aligned}$$

et avec l'équation(6) :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \times \frac{M^2 l^2}{M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m} \times \frac{2(M+m) g H (M^2 l^2 + J_{(oz)}\, m)}{J_{(oz)}\, m} \\ &= (M+m)\, \frac{M^2 l^2}{J_{(oz)}\, m}\, g H \end{aligned}$$

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/