LE CALCUL DE PI

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Démonstration de la formule de John Machin.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

Pour obtenir une approximation de $\pi = 3.141592653589793238\ldots$, nous utilisons la formule trigonométrique :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 \tag{1}$$

et le développement limité au voisinage de zéro de la fonction arctangente. D'après (8) :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^7)$$

Nous avons alors au point $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots \tag{2}$$

Les 10 premiers termes donnent $\pi \approx 3.0418$. Cette formule converge très lentement car nous effectons un développement limité au voisinage de zéro, et pour trouver π nous nous plaçons au point 1. Le

Date: 21 février 2016.

développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage de l'un de ses points $(x_0, f(x_0))$ est le polynôme d'ordre n qui se superpose au mieux à la fonction au voisinage de ce point. Ce point $(x_0, f(x_0))$ est le seul point qui appartienne à la fois au polynôme et à la fonction, et l'on a $f(x_0) = a_0$, où a_0 est le premier coefficient du polynôme.

Nous ne pouvons pas nous servir du développement limité d'arctan(x) au voisinage de 1 car cela suppose que l'on connaisse déjà la valeur de π. En effet, d'après (9) il s'écrit,

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + o[(x-1)^3]$$

et au point 1 on obtient $\pi/4 = \pi/4$. De même d'après (10), le développement limité d'arctan$(x+1)$ au voisinage de zéro s'écrit,

$$\arctan(x+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3)$$

et au point 0 on obtient à nouveau $\pi/4 = \pi/4$. D'après (11), le développement limité d'arctan$(x+1)$ au voisinage de -1 s'écrit :

$$\arctan(x+1) = x+1 - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^5}{5} + o[(x+1)^7]$$

et au point 0 on obtient à nouveau (2).

2. Formule de John Machin (1706)

Théorème 1. $\pi = 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239)$

Démonstration. La formule (1) est de la forme $\pi = a\arctan\varphi$, avec $a = 4$ et $\varphi = 1$. Nous cherchons maintenant une formule de la forme :

$$\pi = a\arctan\alpha + b\arctan\beta \tag{3}$$

avec α et β inférieurs à 1 pour avoir une convergence plus rapide. Les paramètres a et b sont libres mais nous devons les choisir les plus grands possibles pour que les arctangentes soient les plus petites possibles. En posant $A = \arctan\alpha$ et $B = \arctan\beta$, nous avons à résoudre :

$$\begin{aligned} aA + bB &= \pi \\ aA + bB &= 4\arctan 1 \\ \frac{aA}{4} + \frac{bB}{4} &= \arctan 1 \\ \tan\left(\frac{aA}{4} + \frac{bB}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Or,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

donc,

$$\frac{\tan\left(\frac{aA}{4}\right)+\tan\left(\frac{bB}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{aA}{4}\right)\tan\left(\frac{bB}{4}\right)}=1$$
$$\tan\left(\frac{aA}{4}\right)+\tan\left(\frac{bB}{4}\right)+\tan\left(\frac{aA}{4}\right)\tan\left(\frac{bB}{4}\right)=1$$
$$\tan\left(\frac{aA}{4}\right)+\tan\left(\frac{bB}{4}\right)\left[1+\tan\left(\frac{aA}{4}\right)\right]=1$$

et,

$$\tan\left(\frac{bB}{4}\right)=\frac{1-\tan\left(\frac{aA}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{aA}{4}\right)} \tag{4}$$

Nous devons chercher des valeurs de a, b, A, et B solutions de cette équation, puis les remplacer dans l'équation (3). Nous avons le choix pour les paramètres a et b, mais nous devons faire réapparaître α et β, autrement dit $\tan A$ et $\tan B$. Pour cela nous devons prendre a et b multiples de 4, et nous allons devoir utiliser les formules de l'angle double. Pour retrouver la formule de Machin, posons $a = 16$ et $b = 4$. Par la suite nous essaierons avec $a = 4$ et avec $a = 8$.

2.1. **Cas où a=16 et b=4.**

$$\tan B=\frac{1-\tan(4A)}{1+\tan(4A)} \tag{5}$$

Or

$$\begin{aligned}\tan(4A) &= \frac{2\tan(2A)}{1-\tan^2(2A)}\\ &= \frac{2[(2\tan A)/(1-\tan^2 A)]}{1-[(2\tan A)/(1-\tan^2 A)^2]}\\ &= \frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1-\tan^2 A)^2-4\tan^2 A}\\ &= \frac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{\tan^4 A-6\tan^2 A+1}\end{aligned}$$

En se rappelant que $\alpha = \tan A$,

$$\tan(4A)=\frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{\alpha^4-6\alpha^2+1}$$

D'où avec l'équation (5) et $\beta = \tan B$,

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1-(4\alpha-4\alpha^3)/(\alpha^4-6\alpha^2+1)}{1+(4\alpha-4\alpha^3)/(\alpha^4-6\alpha^2+1)}\\ &= \frac{\alpha^4+4\alpha^3-6\alpha^2-4\alpha+1}{\alpha^4-4\alpha^3-6\alpha^2+4\alpha+1} \qquad (6)\end{aligned}$$

Toutes les valeurs de α et β respectant l'équation précédente sont solutions du problème. Pour que la formule converge rapidement nous prenons les valeurs les plus petites possibles pour α et β. Le couple de valeurs (α, β) qui respecte cette condition est tel que $\alpha = \beta$. Soit donc à résoudre :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\alpha^4 + 4\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha + 1}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 4\alpha + 1} \\ \alpha^5 - 4\alpha^4 - 6\alpha^3 + 4\alpha^2 + \alpha &= \alpha^4 + 4\alpha^3 - 6\alpha^2 - 4\alpha + 1 \\ \alpha^5 - 5\alpha^4 - 10\alpha^3 + 10\alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0 & \end{aligned}$$

Cette équation admet 5 racines, toutes réelles :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1 \\ \alpha_2 &= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1 \\ \alpha_3 &= -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1 \\ \alpha_4 &= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1 \\ \alpha_5 &= 1 \end{aligned}$$

La plus petite racine en valeur absolue est $\alpha_4 \approx 0.15838444$. Pour que la formule soit exacte, on choisit un nombre rationnel proche de cette valeur, par exemple $\alpha = 1/5$. Avec l'équation (6) on calcule alors $\beta = -1/239$, et l'on remplace dans l'équation (3) :

$$\pi = 16 \arctan \tfrac{1}{5} - 4 \arctan \tfrac{1}{239}$$

ce qui achève la démonstration. □

Pour $\alpha = 1/6$ on trouve $\beta = 673/1489$, qui converge moins vite car $673/1489 \approx 0,45 > 1/5$. En utilisant le développement limité d'arctangente donné en (8), la formule de Machin s'écrit :

$$\pi = \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{16}{375} + \frac{4}{40955757} + \cdots$$

Les 10 premiers termes donnent $\pi \approx 3.14159268$

2.2. **Cas où a=4 et b=4.**

Prenons maintenant le cas où $a = 4$ et $b = 4$. L'équation (4) s'écrit :

$$\tan B = \frac{1 - \tan(A)}{1 + \tan(A)}$$

En se rappelant que $\alpha = \tan A$ et $\beta = \tan B$,

$$\beta = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

De même que précédemment, on pose $\alpha = \beta$ et l'on résoud l'équation :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\\ \alpha + \alpha^2 &= 1-\alpha\\ \alpha^2 + 2\alpha - 1 &= 0\end{aligned}$$

On trouve le discriminant réduit $\Delta' = 2$ et les racines $\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. On garde la racine la plus petite en valeur absolue, $\alpha_1 = -1 + \sqrt{2}$. Remplaçons dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned}\pi &= 4\arctan\alpha + 4\arctan\alpha\\ &= 8\arctan(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

Cette formule dépend du calcul de $\sqrt{2}$ et converge plus lentement que la formule de Machin car $\sqrt{2} - 1 > 1/5$.

2.3. **Cas où a=8 et b=4.**
Posons $a = 8$ et $b = 4$, l'équation (4) s'écrit :

$$\tan B = \frac{1-\tan(2A)}{1+\tan(2A)}$$

Or,

$$\begin{aligned}\tan(2A) &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\\ &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1-2\alpha/(1-\alpha^2)}{1+2\alpha/(1-\alpha^2)}\\ &= \frac{1-\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha^2+2\alpha}\\ &= \frac{\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha-1}\end{aligned} \tag{7}$$

On pose $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha-1}\\ \alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha &= \alpha^2 + 2\alpha - 1\\ \alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 &= 0\end{aligned}$$

Cette équation admet 3 racines, toutes réelles :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2-\sqrt{3}\\ \alpha_2 &= 2+\sqrt{3}\\ \alpha_3 &= -1\end{aligned}$$

La plus petite racine en valeur absolue est $\alpha_1 \approx 0.267949192$. On choisit un nombre rationnel proche de cette valeur, par exemple $\alpha = 1/4$. Avec l'équation (7), on calcule alors $\beta = 7/23$, on remplace dans l'équation (3) :

$$\pi = 8\arctan(1/4) + 4\arctan(7/23)$$

qui converge plus lentement que la formule de Machin car $7/23 > 1/5$.

3. Annexes

3.1. **Développements en série entière.**

On suppose que la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme dont les puissances sont entières :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

En posant $x = 0$, nous obtenons le premier coefficient :

$$f(0) = a_0$$

Si $f(x)$ est de classe C^1 (dérivable une fois), alors :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

En posant $x = 0$, nous obtenons le deuxième coefficient :

$$f'(0) = a_1$$

Si $f(x)$ est de classe C^2 :

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + 3 \times 4a_4 x^2 + \dots$$

En posant $x = 0$:

$$f''(0) = 2a_2$$

Si $f(x)$ est de classe C^3 :

$$f'''(x_0) = 2 \times 3a_3 + 3 \times 4a_4 x + \dots$$

En posant $x = 0$:

$$f'''(0) = 2 \times 3a_3$$

En notant $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x)$, les coefficients a_n s'écrivent :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Le développement en série entière de $f(x)$ de classe C^∞ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \end{aligned}$$

3.2. **Développements en série de Taylor.**
Lors d'un développement en série entière, la reconstruction de la fonction $f(x)$ par le polynôme commence par le terme $f(0)$. Nous pouvons reconstruire la courbe en commençant par un point quelconque x_0, en translatant le polynôme :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned}$$

En posant $x = x_0$, nous obtenons le premier coefficient :

$$f(x_0) = a_0$$

Si $f(x)$ est de classe C^1, alors :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

En posant $x = x_0$, nous obtenons le deuxième coefficient :

$$f'(x_0) = a_1$$

Le développement en série de Taylor de $f(x)$ de classe C^∞ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n \end{aligned}$$

3.3. **Développements limités.**
Si l'on ne considère que les n premiers termes de la série de Taylor, on obtient le développement limité à l'ordre n de la fonction $f(x)$ de classe C^n au voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 \\ &\qquad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\,(x - x_0)^i + o[(x - x_0)^n] \end{aligned}$$

où $o[(x - x_0)^n]$ désigne une fonction qui tend vers zéro quand x tend vers x_0.

Exemples.
Développement limité à l'ordre 4 *de* $f(x)$ *au voisinage de* 0 *:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}\,x^4 + o(x^4)$$

Développement limité à l'ordre 2 *de* $f(x)$ *au voisinage de* 1 *:*

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + o[(x-1)^2]$$

3.4. **Développement limité d'une fonction translatée.**
Cherchons le développement limité d'une fonction translatée de a selon les x.

$$\begin{aligned}
f(x+a) &= f(x_0+a) + f'(x_0+a)[(x+a)-(x_0+a)] \\
&\qquad + \frac{f''(x_0+a)}{2!}\,[(x+a)-(x_0+a)]^2 \\
&\qquad\quad + \frac{f^{(n)}(x_0+a)}{n!}\,[(x+a)-(x_0+a)]^n \\
&\qquad\qquad + o\{[(x+a)-(x_0+a)]^n\} \\
&= f(x_0+a) + f'(x_0+a)(x-x_0) + \frac{f''(x_0+a)}{2!}\,(x-x_0)^2 \\
&\qquad + \frac{f^{(n)}(x_0+a)}{n!}\,(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0+a)}{i!}\,(x-x_0)^i + o[(x-x_0)^n]
\end{aligned}$$

Exemples.
Développement limité à l'ordre 4 *de* $f(x+1)$ *au voisinage de* 0 *:*

$$f(x+1) = f(1) + f'(1)x + \frac{f''(1)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\,x^3 + \frac{f''''(1)}{4!}\,x^4$$

Développement limité à l'ordre 3 *de* $f(x+1)$ *au voisinage de* 1 *:*

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-1) + \frac{f''(2)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}\,(x-1)^3$$

3.5. **Développement limité d'arctangente.**
Cherchons la dérivée de $\arctan x$, fonction réciproque de $\tan(x)$.

Théorème 2. *Dérivée d'une fonction composée.*

$$(f \circ g)'\,(x) = (f' \circ g)\,(x) \times g'(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\{f[g(x)]\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h) - f[g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x) + g(x+h) - g(x)] - f[g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f[g(x) + g(x+h) - g(x)] - f[g(x)]}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f[g(x) + k] - f[g(x)]}{k} \times \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'[g(x)] \times g'(x)
\end{aligned}$$

□

Théorème 3. *Dérivée d'une fonction réciproque.*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(x)}$$

Démonstration. En posant $g(x) = f^{-1}(x)$ dans le théorème 2,

$$\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) = \left(f' \circ f^{-1}\right)(x) \times \left(f^{-1}\right)'(x)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) &= x' \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(x)}$$

□

Appliquons le théorème 3 à la fonction $\arctan x$. La dérvivée de $\tan(x)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}$$

On en déduit celle de $\arctan x$:

$$\begin{aligned}
\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1 + x^2}
\end{aligned}$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(1+x^2)^{-2} \times 2x \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

La dérivée troisième :

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{-2\left(1+x^2\right)^2 + 2x \times 2(1+x^2) \times 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{[-2(1+x^2)+8x^2]}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{(6x^2-2)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

La dérivée quatrième :

$$\begin{aligned} f''''(x) &= \frac{12x\left(1+x^2\right)^3 - (6x^2-2) \times 3\left(1+x^2\right)^2 \times 2x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{1+x^2} \\ &= \frac{24(x-x^3)}{1+x^2} \end{aligned}$$

La dérivée cinquième :

$$f'''''(x) = 24\,\frac{(1-3x^2)(1+x^2) - (x-x^3) \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Nous obtenons le développement limité d'arctan x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \arctan x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}\,x^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}\,x^5 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^7) \end{aligned} \tag{8}$$

Le développement limité d'arctan x au voisinage de 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \arctan x &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}\,(x-1)^3 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o[(x-1)^4] \end{aligned} \tag{9}$$

Le développement limité d'arctan$(x+1)$ au voisinage de 0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \arctan(x+1) &= f(1) + f'(1)(x) + \frac{f''(1)}{2!}\,x^2 + \dots \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3) \end{aligned} \tag{10}$$

Le développement limité d'arctan$(x+1)$ au voisinage de -1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\arctan(x+1) &= f(0) + f'(0)(x+1) + \frac{f''(0)}{2!}(x+1)^2 + \dots \\ &= x + 1 - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^5}{5} + o[(x+1)^7] \qquad (11)\end{aligned}$$

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/