PI À LA SURFACE DE LA TERRE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. La masse de la Terre courbe l'espace-temps. A la surface de la Terre Pi n'a pas la même valeur que dans un espace euclidien.

Table des matières

1. Introduction

Soit Alice une observatrice de masse m, en équilibre à la surface de la Terre sous l'action de la force de gravitation et de la réaction du sol. Supprimons la réaction du sol. Si Alice tourne autour du centre de la Terre avec une vitesse v constante que nous allons déterminer, la force d'inertie centrifuge s'opposera exactement à la force de gravitation. L'observatrice Alice sera dans un référentiel d'inertie, ce qui montre l'équivalence entre ces deux forces.

La masse de la Terre $M_{\oplus}$, et la vitesse v cherchée, sont suffisamment petites pour écrire l'égalité des forces en mécanique de Newton. Soient G la constante de gravitation et $R_{\oplus}$ le rayon de la Terre, nous avons :

$$F_{centrifuge} = F_{gravitationnelle}$$
$$\frac{mv^2}{R_{\oplus}} = \frac{GmM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$
$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

Soit Bob un observateur dans un référentiel d'inertie, et ne subissant aucun champ de gravitation. Il mesure la circonférence $\mathcal{C}$ de l'orbite d'Alice. Quand Alice mesure la circonférence de sa propre orbite, l'étalon de longueur d'Alice subit la contraction de Lorentz car il est posé dans le sens du mouvement. L'étalon de longueur d'Alice n'est pas contracté quand il sert à mesurer le rayon de l'orbite, c'est à dire

Date: 12 janvier 2016.

le rayon terrestre $R_\oplus$, car il est à chaque instant perpendiculaire au mouvement. Alice mesure une circonférence $\mathcal{C}_A$ telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_A &= \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\ &= \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{1-\dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}}}\end{aligned}$$

Nous en déduisons la valeur π' de π mesurée par Alice dans le champ de gravitation à la surface de la Terre :

$$\begin{aligned}\pi' &= \frac{\mathcal{C}_A}{2R_\oplus}\\ &= \frac{\mathcal{C}}{2R_\oplus\sqrt{1-\dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}}}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}}}\end{aligned}$$

2. Application numérique

Masse terrestre : $M_\oplus = 5,9736.10^{24}$kg
Rayon terrestre : $R_\oplus = 6378137$m
Constante de gravitation : $G = 6,6742.10^{-11}\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2}} &= 0,99999999965225\\ \pi &= 3,1415926535\ldots\\ \pi' &= 3,1415926546\ldots\end{aligned}$$

La neuvième décimale de π est affectée par le champ de gravitation terrestre. Le rayon d'un cercle est plus grand lorsqu'on le dessine sur une sphère que lorsqu'on le dessine sur un plan. π est donc plus petit dans un espace sphérique. Ici, π' étant plus grand que π, la géométrie de l'espace est de type hyperbolique.

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`