POTENTIEL DE CHAMP, POTENTIEL DE FORCE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. En physique on utilise le potentiel, parfois sans préciser s'il s'agit du potentiel de champ ou du potentiel de force.

Table des matières

1. Introduction

Définition 1. *Potentiel d'un champ vectoriel*
Le scalaire B est dit potentiel du champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ ssi :

$$\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\, B$$
$$A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial B}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial B}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial B}{\partial z}\,\boldsymbol{k}\right)$$
$$A_\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + A_\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + A_\phi\,\boldsymbol{e}_\phi = -\left(\frac{\partial A}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial \phi}\,\boldsymbol{e}_\phi\right)$$

On dit aussi que le champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ dérive du potentiel scalaire B.

Date: 25 juin 2017.

2. Force et champ de gravitation

2.1. Force de gravitation.

Soient deux particules de charges gravitationnelles m_1 et m_2, et $\boldsymbol{\rho}_{12}$ le rayon vecteur de la masse 1 vers la masse 2. L'expérience montre que la *force de gravitation* $\boldsymbol{F}$ s'exerçant entre deux particules a pour direction la droite passant par les particules :

$$\pm \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{\rho}$$

Elle est de plus proportionnelle aux masses m_1 et m_2, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. En notant G la constante de proportionnalité et $\boldsymbol{e}_{\rho_{12}}$ le vecteur unitaire de direction $1 \rightarrow 2$, la force exercée par la particule 1 sur la particule 2 s'écrit :

$$\boldsymbol{F}_{12} = \pm\, G \, \frac{m_1 m_2}{\rho^2} \, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}}$$

Il reste à déterminer le sens de la force, autrement dit son signe. m_1, m_2, et G sont positifs, et l'expérience montre que la force de gravitation est attractive :

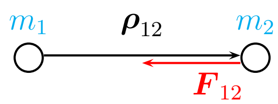

FIGURE 1. Détermination du signe de la force de gravitation

La force est de sens opposé à $\boldsymbol{\rho}_{12}$, donc le signe est négatif, et la force a pour expression :

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{\rho^2} \, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \tag{1}$$

Le théorème de l'action-réaction [1] donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{21} &= -\boldsymbol{F}_{12} \\ &= \frac{G\, m_1 m_2}{\rho^2} \, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \\ &= -\frac{G\, m_1 m_2}{\rho^2} \, \boldsymbol{e}_{\rho_{21}} \end{aligned}$$

2.2. Champ gravitationnel.

On définit le *champ gravitationnel* créé par la particule 1 indépendamment de la charge m_2, par

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{G\, m_1}{\rho^2} \, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \tag{2}$$

1. Voir mécanique classique.pdf

D'où la relation entre force et champ gravitationnels,

$$\boldsymbol{F}_{12} = m_2\, \boldsymbol{E}_1 \tag{3}$$

3. Potentiels gravitationnels

3.1. Potentiel de la force gravitationnelle.

Soit E_p le potentiel scalaire de la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}$. D'après la définition 1 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\mathbf{grad}\, E_p \\ F\boldsymbol{e}_\rho &= -\frac{\partial E_p}{\partial \rho}\, \boldsymbol{e}_\rho \\ F &= -\frac{\partial E_p}{\partial \rho} \end{aligned}$$

et avec la relation (1) :

$$\begin{aligned} E_p &= -\int F\, d\rho \\ &= -\int -\frac{G\, m_1 m_2}{\rho^2}\, d\rho \\ &= -\frac{G\, m_1 m_2}{\rho} \end{aligned} \tag{4}$$

E_p s'appelle *énergie potentielle de gravitation.*

3.2. Potentiel du champ gravitationnel.

Soit V le potentiel scalaire du champ gravitationnel $\boldsymbol{E}$. D'après la définition 1 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\mathbf{grad}\, V \\ E\boldsymbol{e}_\rho &= -\frac{\partial V}{\partial \rho}\, \boldsymbol{e}_\rho \\ E &= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \end{aligned}$$

et avec la relation (2) :

$$\begin{aligned} V &= -\int E\, d\rho \\ &= -\int -\frac{G\, m}{\rho^2}\, d\rho \\ &= -\frac{G\, m}{\rho} \end{aligned} \tag{5}$$

V s'appelle *potentiel de gravitation.*

3.3. Relation entre énergie potentielle et potentiel.
En partant de la relation (3) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{12} &= m_2\, \boldsymbol{E}_1 \\ -\mathbf{grad}\, E_{p_{12}} &= -m_2\, \mathbf{grad}\, V_1 \\ E_{p_{12}} &= m_2 V_1 \end{aligned}$$

que l'on retrouve directement en utilisant les relations (4) et (5).

4. Force et champ électrostatique

4.1. Force électrostatique.
Soient deux particules chargées. L'expérience montre que le vecteur *force électrostatique* $\boldsymbol{F}$, ou *force de Coulomb*, s'exerçant entre deux particules, est proportionnel aux charges q_1 et q_2 des particules qui interagissent, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Cette force a pour direction la droite passant par les particules :

$$\pm\, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}}$$

En notant $1/(4\pi\varepsilon_0)$ la constante de proportionnalité, la force exercée par la particule 1 sur la particule 2 s'écrit :

$$\boldsymbol{F}_{12} = \pm \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\rho^2}\, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}}$$

Il reste à déterminer le sens de la force, autrement dit son signe.
Si q_1 est de même signe que q_2, alors le produit q_1 par q_2 est positif, et l'expérience montre qu'alors la force est répulsive :

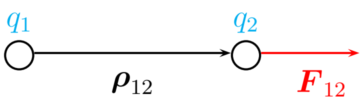

Figure 2. Détermination du signe de la force électrique

Par conséquent, la force est dans le sens de $\boldsymbol{\rho}_{12}$, le signe est positif, et la force s'exprime par :

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\rho^2}\, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \tag{6}$$

Le théorème de l'action-réaction donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{21} &= -\boldsymbol{F}_{12} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\rho^2}\, \boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\rho^2}\, \boldsymbol{e}_{\rho_{21}} \end{aligned}$$

4.2. **Champ électrostatique.**
On définit le vecteur *champ électrostatique* $\boldsymbol{E}_1$ créé par la particule 1 indépendamment de la charge q_2, par :

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\rho^2}\,\boldsymbol{e}_{\rho_{12}} \tag{7}$$

D'où la relation entre force et champ électrostatiques :

$$\boldsymbol{F}_{12} = q_2\,\boldsymbol{E}_1 \tag{8}$$

5. Potentiels électrostatiques

5.1. **Potentiel de la force électrostatique.**
Soit E_p le potentiel scalaire de la force électrostatique $\boldsymbol{F}$.
D'après la définition 1 :

$$\boldsymbol{F} = -\mathbf{grad}\,E_p$$

et avec la relation (6) :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\rho} \tag{9}$$

E_p s'appelle *énergie potentielle électrostatique*.

5.2. **Potentiel du champ électrostatique.**
Soit V le potentiel scalaire du vecteur champ électrostatique $\boldsymbol{E}$.
D'après la définition 1 :

$$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,V$$

et avec la relation (7) :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\rho} \tag{10}$$

V s'appelle *potentiel électrostatique*, ou *potentiel*.

5.3. **Relation entre énergie potentielle et potentiel.**
En partant de la relation (8) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12} &= q_2\,\boldsymbol{E}_1\\ -\mathbf{grad}\,E_{p_{12}} &= -q_2\,\mathbf{grad}\,V_1\\ E_{p_{12}} &= q_2 V_1\end{aligned}$$

que l'on retrouve directement en utilisant les relations (9) et (10).

6. Conclusion

En électrostatique on utilise le plus souvent le potentiel V du champ électrostatique, que l'on appelle potentiel, alors qu'en mécanique on utilise plutôt le potentiel E_p de la force de gravitation, que l'on appelle énergie potentielle.

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/