QUELQUES REMARQUES GÉNÉRALES SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ

W. V. IGNATOWSKY (BERLIN 1910)

Lorsqu'Einstein a présenté le principe de relativité, il a supposé que la vitesse de la lumière c était une constante universelle, c.-a-d. qu'elle conservait la même valeur dans tous les référentiels. De même, dans ses recherches Minkowski est parti de l'invariant $r^2 - c^2t^2$, bien qu'à en juger la lecture de son article « Espace et Temps » [1], il voit plus c comme une constante universelle de l'espace-temps que comme vitesse de la lumière. Je me suis alors interrogé sur les relations ou transformations qui émergent si l'on place le principe de relativité au centre de notre étude, et si les transformations de Lorentz sont vraiment les seules à satisfaire le principe de relativité.

Pour répondre à cette question, nous allons de nouveau examiner ce que le principe de relativité nous enseigne. Si nous avons deux référentiels K et K' en mouvement de translation l'un par rapport à l'autre, le principe de relativité stipule que les deux référentiels peuvent être considérés comme équivalents, c.-à-d. que l'un peut être considéré comme au repos tandis que l'autre est en mouvement. En d'autres termes, nous ne pouvons pas déterminer de mouvement absolu.

Si K et K' sont équivalents, et si nous pouvons exprimer dans le référentiel K une quantité physique E comme fonction des paramètres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en écrivant

$$E = \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots), \tag{1}$$

alors la quantité correspondante E' dans le référentiel K' doit pouvoir être exprimée par la même fonction φ des paramètres correspondants $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, c.-à-d.

$$E' = \varphi(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots).$$

Si l'on représente E' en fonction des paramètres non primés,

$$E' = f(a_1, a_2, a_3, \ldots) \tag{2}$$

alors, puisque K et K' sont équivalents, l'équation

$$E = f(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots) \tag{3}$$

doit aussi être valable. Les équations (1) à (3) p. 1 sont la formulation mathématique du principe de relativité. Si q est la vitesse du référentiel K' par rapport à K mesurée dans ce dernier, et si q' est la vitesse du référentiel K mesurée depuis K', alors évidemment

$$q' = -q \tag{4}$$

Si l'on considère maintenant un processus purement cinématique, c.-à-d. où seuls x, y, z et t sont pris en compte, alors on peut écrire par exemple l'équation suivante

$$x' = \varphi(x, y, z, t, q) \tag{5}$$

et de même pour y', z' et t'. En effet, x, y, z et t doivent être considérés comme des paramètres permettant, entre autres, de décrire un phénomène physique, et d'après (1) à (3) p. 1, nous voyons qu'en général a_1 n'est pas nécessairement égal à a'_1.

Bien que les calculs suivants soient très élémentaires, pour gagner de la place je ne présenterai ici que le raisonnement et les résultats finaux, et je ferai référence à de plus amples détails dans l'un de mes articles qui paraîtra bientôt dans les Archives de Mathématiques et de Physique.

On note $\vec{u}_0$ le vecteur unitaire qui donne la direction du mouvement de K' par rapport à K, on place les axes X et X' dans cette direction, et l'on suppose de plus pour simplifier que l'axe X' et dans le prolongement de l'axe X. Alors, l'espace étant supposé homogène et isotrope, et pour des raisons de symétrie, on peut montrer que dans l'équation (5) p. 1 y et z ne peuvent apparaître qu'implicitement dans r, où r est la distance d'un point quelconque à l'axe des X. De plus on peut montrer que $r = r'$, et par conséquent x' ne peut dépendre de r. Donc à la place de (5) p. 1 on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi(x, t, q) \\ t' &= f(x, t, q) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

1. Ce journal vol. 10, p. 104, 1909.

et par conséquent, grâce à (2) p. 1 et (3) p. 1

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x', t', q') \\ t &= f(x', t', q') \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si l'on prend la différentielle totale de (6) p. 1 et (7) p. 2, on a

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx + sdt \\ dt' &= p_1 dx + s_1 dt \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

et

$$\left.\begin{aligned} dx &= p'dx' + s'dt' \\ dt &= p_1'dx' + s_1'dt' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où $p, s, p', s', p_1, s_1, p_1', s_1'$ sont huit dérivées partielles, que nous considérons pour l'instant comme des fonctions inconnues de x, t, q et x', t', q'. Posons D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} p & p_1 \\ s & s_1 \end{vmatrix} = ps_1 - p_1 s \tag{10}$$

De (8) p. 2 et (9) p. 2 on déduit[1] :

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{s_1}{D}\ ; \qquad & s' &= \frac{-s}{D} \\ p_1' &= \frac{-p_1}{D}\ ; \qquad & s_1' &= \frac{p}{D} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Prenons à présent dans K et K' deux éléments dx et dx', de sorte qu'au repos relatif ils soient de longueurs égales. Si nous mesurons de façon synchrone dx' depuis K (donc $dt = 0$) on obtient

$$dx' = pdx$$

Si nous mesurons de façon synchrone dx depuis K' (donc $dt' = 0$) alors

$$dx = p'dx'$$

Les deux référentiels K et K' sont équivalents, et dx et dx' ont la même longueur lorsqu'ils sont au repos relatif. Par conséquent, les longueurs mesurées depuis les deux référentiels doivent être égales :

$$p = p' \tag{12}$$

À partir de cette relation et de (11) p. 2 on a

$$p^2 = s_1 s_1'$$

Suivons maintenant le mouvement d'un point matériel ou d'un phénomène dans l'espace, et notons son vecteur vitesse par $\vec{v}$ ou $\vec{v}'$. Grâce à (8) p. 2, on peut alors facilement démontrer[2] que

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (p-1)\vec{u}_0\vec{u}_0 \cdot \vec{v} + s\vec{u}_0}{A} \tag{13}$$

où

$$A = s_1 + p_1 \vec{u}_0 \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$ étant totalement arbitraire, il est clair que p, s etc. ne peuvent dépendre de $\vec{v}$. Supposons que le point mobile soit immobile dans K'. Alors $\vec{v}' = \vec{0}$ et $\vec{v} = q\vec{u}_0$. Avec ces relations et (13) p. 2 nous avons

$$s = -pq \tag{14}$$

Par des considérations similaires[3] à celles qui précèdent

$$s_1 = p \tag{15}$$

de sorte que (8) p. 2 devient

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= p_1 dx + pdt \end{aligned}\right\}$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer p_1 et p, car les quantités primées sont obtenues à partir de (11) p. 2. Pour cela nous introduisons un troisième référentiel K'' qui se déplace dans la même direction $\vec{u}_0$ à la vitesse q_2 mesurée dans K. La vitesse de K'' mesurée dans K' vaut q_1. Pour le couple $K'K''$, on note les quantitiés analogues à p, p_1, q par $\bar{p}, \bar{p}_1, q_1$, et pour le couple KK'' par p_1'', p'', q_2. On peut alors facilement démontrer[4] les relations suivantes :

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{pq_1} = \frac{p_1''}{p''q_2}$$

Comme les fraction entre elles contient des grandeurs indépendantes, nous voyons que celles-ci ne peuvent être qu'une constante, que nous désignons par $-n$. Finalement nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= -pqndx + pdt \end{aligned}\right\}$$

De plus, de (12) p. 2 et (11) p. 2 on déduit[5]

$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

soit

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 n}} \tag{16}$$

De (16) p. 3 on déduit que n, que l'on peut prendre comme une constante universelle de l'espace-temps, est le carré de l'inverse d'une vitesse[6], donc une quantité positive non nulle.

Nous avons obtenu des transformations similaires à celles de Lorentz, avec n à la place de $\frac{1}{c^2}$. Cependant, le signe de n n'est pas déterminé car on pourrait tout aussi bien placer un signe positif devant $q^2 n$ dans (16) p. 3. Pour déterminer la valeur numérique et le signe de n, nous devons maintenant recourir à l'expérimentation. Puisque nous ne nous sommes appuyés sur aucun phénomène physique spécifique pour les dérivation ci-dessus, nous pouvons déterminer n à partir de n'importe quel phénomène, et nous devrions toujours obtenir la même valeur pour n, puisque n est une constante universelle.

Nous pouvons par exemple mesurer de façon synchrone la longueur d'un mètre étalon en mouvement dans notre référentiel. Si la mesure indique une contraction alors le signe est négatif, et n peut être calculé à partir du facteur de contraction. Cependant, comme nous le savons, la contraction est trop faible pour être mesurée directement.

Par exemple, nous pouvons mesurer de façon synchrone la longueur d'un mètre en mouvement. Si la mesure montre une contraction de la longueur alors nous devons prendre un signe négatif, et n peut être calculé à partir de cette contraction. Quoi qu'il en soit, nous savons que la contraction sera trop petite pour être mesurée directement.

Intéressons-nous maintenant aux équations de l'électromagnétisme, plus particulièrement au cas d'une charge ponctuelle ayant un mouvement uniforme. Outre le principe de relativité, nous savons que la surface équipotentielle du champ électrique de cette charge ponctuelle est un ellipsoïde de Heaviside pour l'observateur au repos, dont le rapport des axes vaut $\sqrt{1 - q^2/c^2}$. En nous basant sur le principe de relativité, nous savons que pour l'observateur se déplaçant avec la charge ponctuelle les surfaces équipotentielles sont des sphères. Quoi qu'il en soit, cette sphère apparaîtra à l'observateur en mouvement relatif par rapport à la charge, comme un ellipsoïde ayant un rapport axial de $\sqrt{1 - q^2 n}$.

Par conséquent, $\sqrt{1 - q^2/c^2} = \sqrt{1 - q^2 n}$. Il en résulte que

$$n = \frac{1}{c^2}$$

C'est pour cela que la vitesse de la lumière c est constante dans tous les référentiels[7]. En même temps, nous voyons que la constante universelle d'espace-temps n est déterminée par la valeur numérique de c.

La dérivation des équations de transformation précédente montre clairement que l'optique a perdu sa position particulière dans l'expression du principe de relativité. En cela, le principe de relativité en lui-même gagne en généralité, car il ne dépend plus d'un phénomène physique particulier mais d'une constante universelle n.

Nous pouvons néanmoins accorder à l'optique et aux équations de l'électrodynamiques une position particulière, non par rapport au principe de relativité mais par rapport aux autres branches de la physique, en ce sens qu'elle permet de déterminer la constante n.

D'autre part, si en transformant les autres équations de la physique en accord avec le principe de relativité nous constatons l'apparition de la constante n, nous ne devons pas nécessairement en conclure que des forces électriques sont en jeu, mais seulement que du point de vue du principe de relativité, l'espace et le temps impriment leur empreinte sur tous les phénomènes physiques par le biais de la constante n.

Pour illustrer un peu plus la signification de n, utilisons une analogie avec l'optique, la relation entre image et objet. Du point de vue de pure optique géométrique, l'objet et l'image sont interchangeables. Il en va exactement de même lorsque nous considérons une règle de mesure en mouvement qui nous apparaît comme contractée. Nous pouvons dire que l'espace et le temps projettent cette règle de mesure en mouvement, de sorte que nous ne pouvons voir que l'image de celle-ci lorsque nous supposons que la règle de mesure au repos est un objet.

Nous pouvons donc pleinement souscrire aux propos de Minkowski, qui dit dans son article « Espace et Temps » [2] : « La contraction ne doit pas être considérée comme conséquence de la résistance dans l'éther, mais simplement comme un don d'en haut, comme une circonstance concomitante à celle du mouvement », précisément parce que n est une constante universelle.

2. Loco citato S. 106.

Enfin, j'aimerais évoquer brièvement les vitesses possibles du point de vue du principe de relativité. Prenons l'expression (16) p. 3 pour p. La contraction observé d'un segment de droite se déplaçant avec K' dépend de p. Par conséquent p ne peut être imaginaire, donc q doit toujours rester inférieur à c. Mais que signifie q ? q étant ici la vitesse du référentiel K', elle ne peut être supérieure à c. En d'autres termes, aucun référentiel au repos ne peut avoir une vitesse relative supraluminique. Un référentiel au repos n'est pas une simple construction mathématique, il faut imaginer un monde matériel avec ses observateurs et ses horloges synchrones. Inversement, nous supposons que tout point matériel peut être au repos. Il s'ensuit qu'un point matériel ne peut se déplacer à une vitesse supraluminique.

(Reçu le 23 septembre 1910.)

Notes

[1]

$$\begin{aligned} dx &= p'dx' + s'dt' \\ &= p'(pdx + sdt) + s'(p_1 dx + s_1 dt) \\ &= (pp' + s'p_1)dx + (p's + s's_1)dt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} pp' + s'p_1 = 1 \\ p's + s's_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s' = \dfrac{1-pp'}{p_1} \\ s' = \dfrac{-p's}{s_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} s_1 - pp's_1 &= -p'sp_1 \\ s_1 &= p'(ps_1 - p_1 s) \\ p' &= \frac{s_1}{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt &= p_1'dx' + s_1'dt' \\ &= p_1'(pdx + sdt) + s_1'(p_1 dx + s_1 dt) \\ &= (p_1'p + s_1'p_1)dx + (p_1's + s_1's_1)dt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_1'p + s_1'p_1 = 0 \\ p_1's + s_1's_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1' = \dfrac{-s_1'p_1}{p} \\ p_1' = \dfrac{1-s_1's_1}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -s_1'p_1 s &= p - s_1's_1 p \\ p &= s_1'(ps_1 - p_1 s) \\ s_1' &= \frac{p}{D} \end{aligned}$$

En croissant les relations de dx et celles de dt :

$$\begin{cases} pp' + s'p_1 = 1 \\ p_1'p + s_1'p_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{1-pp'}{s'} \\ p_1 = \dfrac{-p_1'p}{s_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} s_1' - pp's_1' &= -p_1'ps' \\ s_1' &= p(p's_1' - p_1's') \end{aligned}$$

Donc $p's_1' - p_1's' = \frac{1}{D}$.

$$\begin{cases} pp' + s'p_1 = 1 \\ p_1'p + s_1'p_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{1-s'p_1}{p'} \\ p = \dfrac{-s_1'p_1}{p_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} p_1' - p_1'sp_1 &= -p's_1'p_1 \\ p_1' &= p_1(p_1's - p's_1') \\ &= \frac{-p_1}{D} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p's + s's_1 = 0 \\ p_1's + s_1's_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \dfrac{s's_1}{p'} \\ s = \dfrac{1-s_1's_1}{p_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -ss_1 - p_1' &= p' - s_1's_1 \\ p' &= s_1(p's_1 - s'p_1') \end{aligned}$$

Donc $p's_1 - s'p_1' = \frac{1}{D}$.

$$\begin{cases} p's + s's_1 = 0 \\ p_1's + s_1's_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \dfrac{-p's}{s'} \\ s_1 = \dfrac{1-p_1's}{s_1'} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -s_1'p's &= s_1' - s'p_1's \\ s' &= s(s'p_1' - s_1'p) \\ &= \frac{-s}{D} \end{aligned}$$

Les quatre dérivées partielles primées sont donc obtenues à partir des quatre dérivées partielles non primées.

[2] Avec les relations (8) p. 2 :

$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{pdx + sdt}{p_1 dx + s_1 dt} = \dfrac{pv_x + s}{p_1 v_x + s_1} = \vec{v}' \cdot \vec{u}_0 \\ v_y' = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{p_1 dx + s_1 dt} = \dfrac{v_y}{p_1 v_x + s_1} = \vec{v}' \cdot \vec{\jmath}' \\ v_z' = \dfrac{dz'}{dt'} = \dfrac{dz}{p_1 dx + s_1 dt} = \dfrac{v_z}{p_1 v_x + s_1} = \vec{v}' \cdot \vec{k}' \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \frac{(pv_x + s)\vec{u}_0 + v_y\vec{\jmath}' + v_z\vec{k}'}{p_1 v_x + s_1} \\ &= \frac{(pv_x + s)\vec{u}_0 - v_x\vec{u}_0 + v_x\vec{u}_0 + v_y\vec{\jmath}' + v_z\vec{k}'}{p_1 v_x + s_1} \\ &= \frac{(p-1)v_x\vec{u}_0 + s\vec{u}_0 + \vec{v}}{p_1 v_x + s_1} \\ &= \frac{(p-1)\vec{u}_0\vec{v}\cdot\vec{u}_0 + s\vec{u}_0 + \vec{v}}{p_1 v_x + s_1}\end{aligned}$$

[3] Supposons que le point mobile soit immobile dans K. Alors $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v}' = q'\vec{u}_0$, soit avec (4) p. 1, $\vec{v}' = -q\vec{u}_0$. On injecte ces deux relations dans (13) p. 2 :

$$-q\vec{u}_0 = \frac{s\vec{u}_0}{s_1}$$
$$-s_1 q = s$$

Avec (14) p. 2 :

$$-s_1 q = -pq$$
$$s_1 = p$$

[4]

$$KK' \begin{cases} dx' = pdx - pqdt \\ dt' = p_1 dx + pdt \end{cases} \qquad K'K'' \begin{cases} dx'' = \bar{p}dx' - \bar{p}q_1 dt' \\ dt'' = \bar{p}_1 dx' + \bar{p}dt' \end{cases} \qquad KK'' \begin{cases} dx'' = p''dx - p''q_2 dt \\ dt'' = p_1'' dx + p''dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx'' = \bar{p}pdx - \bar{p}pqdt - \bar{p}q_1 p_1 dx - \bar{p}q_1 pdt \\ dt'' = \bar{p}_1 pdx - \bar{p}_1 pqdt + \bar{p}p_1 dx + \bar{p}pdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx'' = (\bar{p}p - \bar{p}q_1 p_1)dx - (\bar{p}pq + \bar{p}q_1 p)dt \\ dt'' = (\bar{p}_1 p + \bar{p}p_1)dx + (\bar{p}p - \bar{p}_1 pq)dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p'' = \bar{p}p - \bar{p}q_1 p_1 \\ p'' = \bar{p}p - \bar{p}_1 pq \end{cases} \Rightarrow \bar{p}q_1 p_1 = \bar{p}_1 pq \Rightarrow \frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1}$$

Ces fractions ne dépendant que de grandeur prises dans un même référentiel, on peut généraliser cette relation :

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1} = \frac{p_1''}{p''q_2}$$

[5] On injecte les relations (15) p. 2 et (12) p. 2 dans (11) p. 2 :

$$p = \frac{p}{D} \qquad \Rightarrow \qquad D = 1$$

Avec la définition (10) p. 2 de D puis avec (14) p. 2 :

$$ps_1 - p_1 s = 1$$
$$p^2 + pqp_1 = 1$$

En utilisant $p_1/(pq) = -n$ soit $p_1 = -npq$:

$$p^2 - p^2 q^2 n = 1$$
$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

[6] D'après (8) p. 2 p est sans dimension.

[7] Le rapport $\sqrt{1 - q^2/c^2}$ des axes principaux de l'ellipsoïde de Heaviside n'est peut être qu'une excellente approximation de la forme réelle de l'ellipsoïde, autrement dit le raisonnement qui suit cette relation est inexact et ne prouve pas que $c = n$, mais prouve seulement que c est soit extrêmement proche de n, soit confondue avec n.