LES RACINES CARRÉES ET LES RACINES N-IÈMES

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Démonstration de la suite de Héron pour calculer les racines carrées à partir des opérations élémentaires d'addition, soustraction, multiplication et division. Puis généralisation de la méthode aux racines n-ièmes.

Table des matières

1. Exemple numérique

Soit à calculer $\sqrt{10}$. La calculatrice donne $\sqrt{10} \simeq 3,16227766$. Pour amorcer la suite il nous faut une valeur de départ. Nous choisissons 3 dans cet exemple car $\sqrt{10}$ est proche de 3, mais la suite de Héron converge quelle que soit le choix pour la valeur de départ. Une première valeur approchée de $\sqrt{10}$ est donnée par le calcul suivant :

$$\frac{1}{2}\left(3+\frac{10}{3}\right) \simeq 3,16666667$$

Pour obtenir plus de décimales exactes, on réitère le procédé. On remarquera qu'il est inutile de conserver toutes les décimales des calculs intermédiaires :

$$\frac{1}{2}\left(3,17+\frac{10}{3,17}\right) \simeq 3,16228707$$

2. Démonstration de la suite de Héron

La méthode utilisée pour le calcul de $\sqrt{10}$ est une suite qui s'écrit :

$$B_n = \frac{1}{2}\left(B_{n-1}+\frac{A}{B_{n-1}}\right)$$

Date: 19 avril 2016.

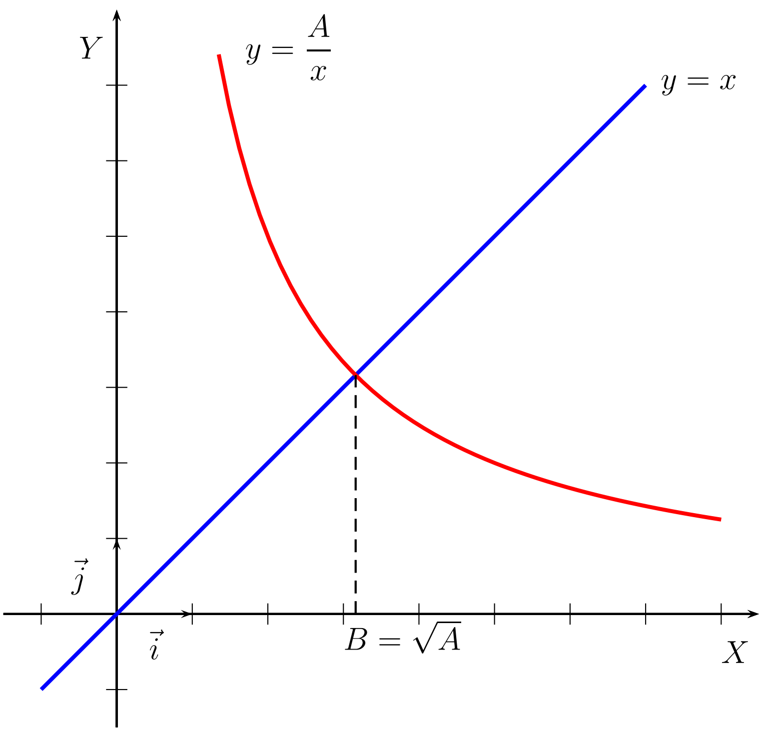
dans laquelle $A = 10$ et $B_0 = 3$. Puis nous avons calculé :

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(B_0 + \frac{A}{B_0}\right) \simeq 3,16666667$$
$$B_2 = \frac{1}{2}\left(B_1 + \frac{A}{B_1}\right) \simeq 3,16228707$$

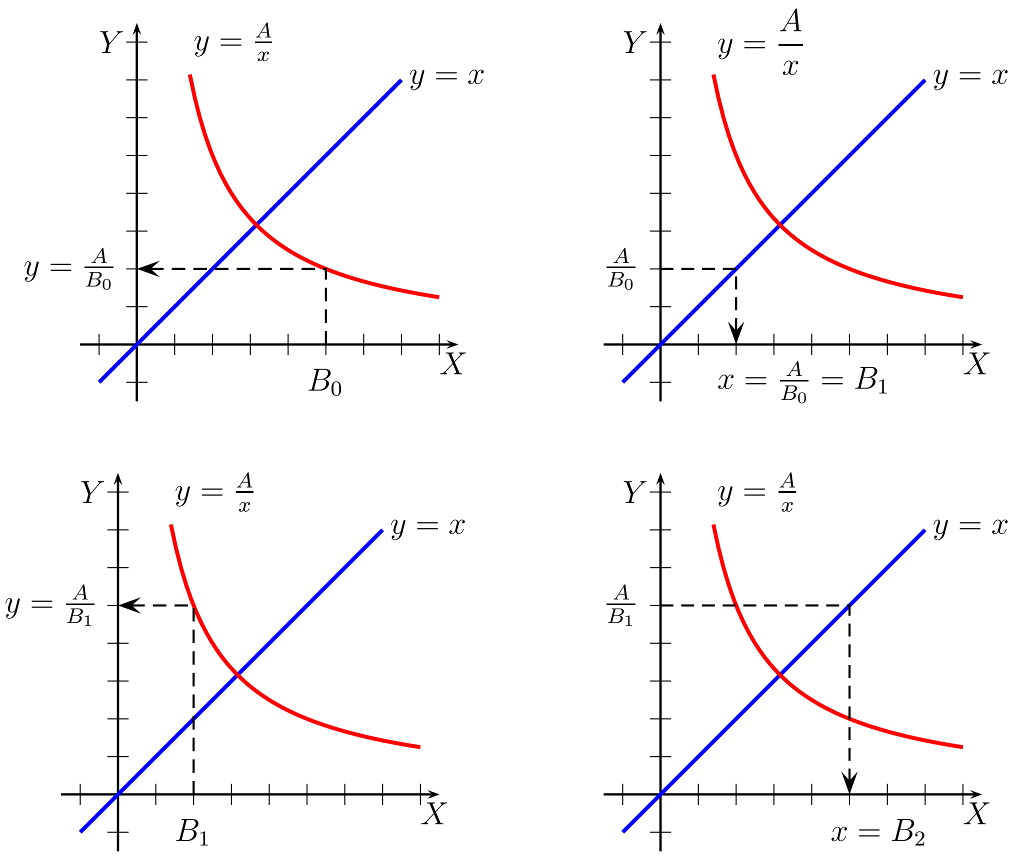
Dans ce qui suit, les paramètres seront notés en majuscule (A et B), alors que les variables seront notées en minuscule (x et y).
Soit un nombre A dont on cherche la racine B, alors :

$$B = \sqrt{A}$$
$$B^2 = A$$
$$B = \frac{A}{B}$$

Pour résoudre cette équation, nous allons faire varier x jusqu'à ce qu'il soit solution de $x = \dfrac{A}{x}$. Quand x sera solution de l'équation, il aura pour valeur B. Par conséquent, si l'on trace les courbes $y = x$ et $y = \dfrac{A}{x}$, elles seront séquentes en $x = B$.



Voyons ce qu'il se passe si l'on utilise la suite $B_n = \dfrac{A}{B_{n-1}}$ en fixant la valeur de départ à B_0, avec B_0 quelconque et si possible proche de $\sqrt{A}$. Une fois B_0 fixée, on trouve graphiquement $B_1 = \dfrac{A}{B_0}$, puis $B_2 = \dfrac{A}{B_1}$.



On constate que $B_2 = B_0$, ce que l'on vérifie aisément :

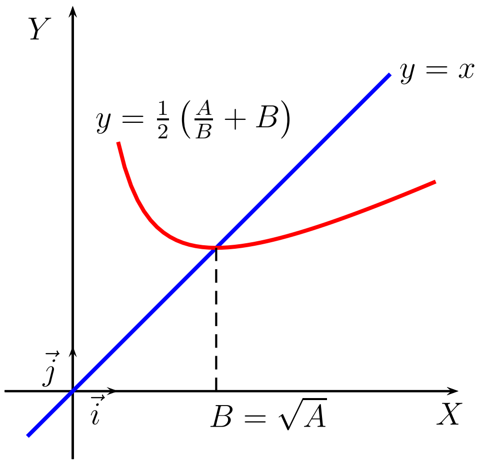
$$B_2 = \frac{A}{B_1} = \frac{A}{A/B_0} = B_0$$

Ce résultat montre que la suite $B_n = \dfrac{A}{B_{n-1}}$ ne converge pas vers $\sqrt{A}$. Pour que x tende vers $\sqrt{A}$ il faut que graphiquement l'on s'approche de l'intersection des deux courbes (ici l'une des courbes est une droite, mais la méthode de résolution s'utilise de manière générale avec deux courbes).

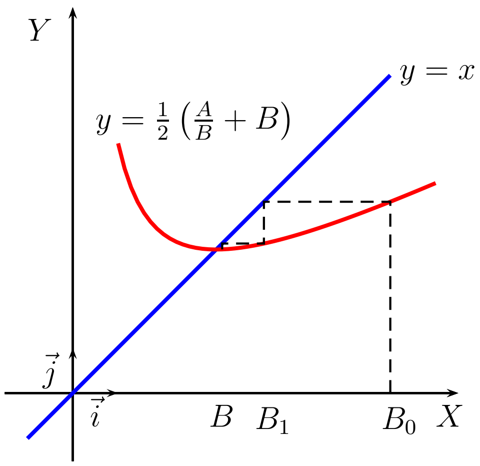
Réécrivons l'équation de départ comme ceci :

$$\begin{aligned} B &= \frac{A}{B} \\ B + B &= \frac{A}{B} + B \\ 2B &= \frac{A}{B} + B \\ B &= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + B\right) \end{aligned}$$

On trace $y = x$ et $y = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + B\right)$. Elles sont séquentes en $x = B$.



Comment se comporte la nouvelle suite $B_n = \frac{1}{2}\left(B_{n-1} + \frac{A}{B_{n-1}}\right)$:



Elle converge rapidement vers $x = \sqrt{A}$. En regardant le schéma ci-dessus on comprend que la condition de convergence de la suite est que la courbe $y = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + x\right)$ soit minimale en $\sqrt{A}$. En réalité il suffit qu'elle soit extrémale en ce point, peu importe que ce soit un maximum ou un minimum.

Vérifions que $\sqrt{A}$ est bien un extrémum de $y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + x\right)$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

$$\frac{A}{x^2} = 1$$

$$A = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{A}$$

$\sqrt{A}$ est donc bien un extrémum de $y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + x\right)$. Nous allons maintenant généraliser cette méthode aux racines n-ièmes.

3. Généralisation aux racines n-ièmes

$$B^n = A$$

$$B \times B^{n-1} = A$$

$$B = \frac{A}{B^{n-1}}$$

$$B + (n-1)B = \frac{A}{B^{n-1}} + (n-1)B$$

$$nB = \frac{A}{B^{n-1}} + (n-1)B$$

$$B = \frac{1}{n}\left[\frac{A}{B^{n-1}} + (n-1)B\right]$$

d'où la suite

$$B_m = \frac{1}{n}\left[(n-1)\,B_{m-1} + \frac{A}{B_{m-1}^{n-1}}\right]$$

Vérifions que $\sqrt[n]{A}$ est un extrémum de $y(x) = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)\,x + \dfrac{A}{x^{n-1}}\right]$

$$y'(x) = \frac{1}{n}\left[(n-1) - (n-1)Ax^{-n}\right]$$

$$\frac{n-1}{n}\left(1 - Ax^{-n}\right) = 0$$

$$Ax^{-n} = 1$$

$$A = x^n$$

$$x = \pm\sqrt[n]{A}$$

$\sqrt[n]{A}$ est donc bien un extrémum de $y(x) = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)\,x + \dfrac{A}{x^{n-1}}\right]$.

Remarque :
Dans le cas où A est négatif, n est obligatoirement impaire, et l'on ne conserve que le signe négatif dans la relation précédente. Par exemple pour $A = -27$, nous avons $3 = -\sqrt[3]{-27}$.

4. Exemple numérique

Soit à calculer $\sqrt[5]{7}$. Dans cet exemple, $A = 7$, $n = 5$, et l'on choisi $B_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
B_1 &= \frac{1}{5}\left[4\times 1 + \frac{7}{1^4}\right] = \frac{11}{5} = 2,2\\
B_2 &= \frac{1}{5}\left[4\times 2,2 + \frac{7}{2,2^4}\right] = 1,81976367\\
B_3 &= \frac{1}{5}\left[4\times 1,82 + \frac{7}{1,82^4}\right] = 1,58359759\\
B_4 &= \frac{1}{5}\left[4\times 1,58 + \frac{7}{1,58^4}\right] = 1,48864651\\
B_5 &= \frac{1}{5}\left[4\times 1,49 + \frac{7}{1,49^4}\right] = 1,47604226
\end{aligned}
$$

La calculatrice donne $\sqrt[5]{7} \simeq 1,47577316$.

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/