http ://o.castera.free.fr/
o.castera@free.fr

Relativité restreinte

Olivier Castéra

Le 21 mai 2024

Table des matières

1 Les relativités

1.1 Principe de relativité

Définition 1.1.1. *Référentiel*
Un référentiel est un espace muni d'un système de coordonnées, et un temps mesuré par une horloge fixe dans cet espace.

À tout observateur on assigne un référentiel, donc un espace et un temps identique en tout point de cet espace. L'observateur choisit un système de coordonnées pour se repérer dans son espace propre, et un instrument de mesure du temps pour se repérer dans son temps propre. Il se place habituellement mais pas nécessairement au centre de son système de coordonnées. Les observateurs peuvent avoir un mouvement quelconque, et peuvent tourner sur eux-mêmes. Deux observateurs fixes l'un par rapport à l'autre auront le même espace et le même temps, mais pourront choisir deux systèmes de coordonnées différents. Un changement d'observateur est un changement de point de vue. Parmi tous les observateurs, il existe un ensemble d'observateurs que la physique ne peut distinguer ni par des expériences, ni par des observations. C'est le principe de relativité :

Définition 1.1.2. *Principe de relativité*
Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique.

Ces observateurs particuliers, indistinguables pour la physique, sont dit équivalents :

Définition 1.1.3. *Référentiels équivalents*
Les référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique sont dits équivalents.

1.1.1 Les lois physiques

Une loi physique est une relation fonctionnelle F entre les valeurs $a, b, c, \ldots$ de diverses grandeurs physiques. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels équivalents, le principe de relativité énonce que

$$\text{si dans } \mathcal{R} \text{ on a } F(a,b,c,\dots) = 0, \text{ alors dans } \mathcal{R}' \text{ on a } F(a',b',c',\dots) = 0$$

où la relation fonctionnelle F est la même dans les deux référentiels, et plus généralement dans tous les référentiels équivalents. En revanche, les valeurs a et a' d'une même grandeur physique peuvent être différentes selon le référentiel, de même pour les valeurs b et b', etc.

Définition 1.1.4. *Loi covariante*
Une loi physique est dite covariante ssi elle est invariante de forme dans tous les référentiels équivalents, c'est-à-dire, si elle s'écrit sous la même forme pour tous les observateurs équivalents.

Remarque 1.1.1. *La covariance des lois physique n'a pas de rapport avec la covariance et la contravariance des composantes des tenseurs.*

1.1.2 Les référentiels équivalents

Le principe de relativité étant posé, cherchons quels sont les référentiels équivalents pour la formulation des lois de la physique. L'équivalence physique entre deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est une *relation d'équivalence* au sens mathématique du terme :

(1) Réflexivité

$\mathcal{R}$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}$. Les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}$. En notant $\sim$ la relation d'équivalence :

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}$$

(2) Symétrie

Si $\mathcal{R}$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{R}'$ est physiquement équivalent à $\mathcal{R}$. Si les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, alors elles sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \text{ ssi } \mathcal{R}' \sim \mathcal{R}$$

(3) Transitivité

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont physiquement équivalents et s'il en est de même pour $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$ sont physiquement équivalents. Si les lois physiques sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}''$, alors elles sont invariantes lorsque l'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}''$:

$$\text{Si } \mathcal{R} \sim \mathcal{R}' \text{ et } \mathcal{R}' \sim \mathcal{R}'' \text{ alors } \mathcal{R} \sim \mathcal{R}''$$

Remarque 1.1.2. *La relation d'équivalence généralise la notion d'égalité, ainsi, si du point de vue de la formulation des lois de la physique nous ne pouvons pas dire que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égaux, nous pouvons dire qu'ils sont équivalents.*

1.1.3 Le groupe des transformations inertielles

Les théories construitent à partir du principe de relativité appliqué aux référentiels équivalents (les lois de la physique s'écrivent de la même façon pour les observateurs équivalents), devront donner la loi de « transformation » des coordonnées spatiales et temporelles lorsqu'un observateur « change » de référentiel équivalent.

> REMARQUE 1.1.3. *Un observateur ne peut pas changer de référentiel, il reste toujours dans son propre référentiel. S'il se met en mouvement, pour un autre observateur il change de référentiel, mais pas pour lui. En revanche il peut se demander comment un évènement (quelque chose qui a lieu quelque part à un instant donné) est vu par un autre observateur équivalent, c'est-à-dire quelles sont les coordonnées spatio-temporelles de cet évènement pour cet autre observateur. Nous ferons donc un abus de language lorsque nous parlerons de « changement » de référentiel. De même, les coordonnées spatiales et temporelles ne se « transforment » pas, mais on obtient les unes à partir des autres.*

Cette loi de transformation des coordonnées par changement de référentiel équivalent doit permettre de trouver les relations entre les valeurs a et a' d'une même grandeur physique exprimée dans différents référentiels équivalents. Cette loi de transformation est une loi physique, donc sur laquelle s'applique le principe de relativité. Elle devra s'écrire sous la même forme quels que soient les référentiels équivalents de départ et d'arrivée.

Ces transformations de coordonnées particulières qui permettent de passer d'un référentiel équivalent à un autre sont appelées *transformations inertielles*, nous verrons l'origine de ce terme au paragraphe 1.2.2 p. 8. Chaque couple de référentiels équivalents définit une transformation inertielle, et réciproquement, toute transformation inertielle appliquée à un référentiel équivalent fait passer à un autre référentiel équivalent. On représente ce passage sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}'$$

Montrons que la relation d'équivalence se traduit par la structure de groupe de l'ensemble $\mathcal{T}$ des transformations inertielles :

a) La transitivité de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}''$$

En notant o la loi de composition des transformations inertielles, cela implique que $T_2 o T_1$ soit une transformation inertielle. Par conséquent o est une loi interne pour l'ensemble $\mathcal{T}$.

b) Supposons que l'on ait :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}'' \xrightarrow{T_3} \mathcal{R}'''$$

$T_3 o(T_2 o T_1)$ fait passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'''$ aussi bien que $(T_3 o T_2) o T_1$. Par conséquent o est une loi associative.

c) La réflexivité de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T} \mathcal{R}$$

Il existe donc une transformation inertielle identité, notée Id, qui permet de définir une transformation inertielle inverse.

d) La symétrie de la relation d'équivalence se représente sous la forme :

$$\mathcal{R} \xrightarrow{T_1} \mathcal{R}' \Longleftrightarrow \mathcal{R}' \xrightarrow{T_2} \mathcal{R}$$

À toute transformation inertielle on peut faire correspondre une transformation inertielle inverse pour l'opération o, notée T^{-1}, telle que $ToT^{-1} = T^{-1}oT = Id$.

Le principe de relativité qui énonce l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physiques implique la structure de groupe de l'ensemble des transformations inertielles qui permettent de passer d'un référentiel équivalent à un autre.

1.2 Les théories de la relativité

1.2.1 Théorie de la relativité galiléenne

Référentiels galiléens

Nous supposons qu'il existe quatre types de liens entre les référentiels équivalents :

a) Les référentiels « translatés dans l'espace »

Ils diffèrent seulement par leur origine spatiale. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font intervenir que des distances, jamais des positions. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quel que soit l'endroit où elle est faite, ce qui implique l'homogénéité de l'espace.

b) Les référentiels « translatés dans le temps »

Ils diffèrent seulement par leur origine temporelle. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font intervenir que des durées, jamais des instants. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quelle que soit l'époque à laquelle elle est faite, ce qui implique l'homogénéité du temps.

c) Les référentiels « tournés »

Ils diffèrent seulement par une orientation différente. L'équivalence de tels référentiels est liée au fait que les lois de la physique ne font jamais intervenir d'angles par rapport à une direction privilégiée. Une expérience de physique donne les mêmes résultats quelle que soit l'orientation spatiale qu'on lui donne, ce qui implique l'isotropie de l'espace.

d) Les référentiels « bougés »

Ils sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Définition 1.2.1. *Référentiels galiléens*
Les référentiels équivalents qui se distinguent les uns des autres par leur position, leur origine temporelle, leur orientation et par un mouvement relatif de translation rectiligne et uniforme, sont appelés référentiels galiléens.

Ils ne tournent pas sur eux-mêmes, leur vitesse relative est constante et ne change pas de direction, ou bien est nulle. Ce mouvement relatif est à l'origine du nom donné au principe de relativité.

Définition 1.2.2. *Coordonnées galiléennes*
Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires (rectilignes orthogonales, aussi appelées cartésiennes normales) dans $\mathcal{R}$, et soit t le temps dans $\mathcal{R}$. Les coordonnées spatio-temporelles (t, x, y, z) sont appelées coordonnées galiléennes.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens, donc en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, de coordonnées galiléennes respectives (t, x, y, z) et (t', x', y', z'). Reprenons les équivalences entre référentiels :

a) Les référentiels « translatés » dans l'espace

En notant $\vec{d}(a, b, c)$ le vecteur distance entre les points origine des référentiels :

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \vec{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{d} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$t' = t$$

b) Les référentiels « translatés » dans le temps

En notant t le décalage fixe entre les horloges :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et} \quad t' = t - \mathrm{t}$$

c) Les référentiels « tournés »

Prenons pour axe de rotation l'axe z et supposons-le confondu avec l'axe z'. Notons R la matrice rotation d'un angle θ fixe, autour des axes z et z' :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}' = R\vec{r}$$

$$t' = t$$

d) Les référentiels « bougés »

Supposons que les origines O et O' des référentiels se croisent à l'instant $t = t' = 0$, autrement dit, les référentiels ne sont ni translatés dans l'espace ni dans le temps. Soit $\vec{\mathrm{V}}'$ la vitesse constante de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et soit $\vec{\mathrm{V}}$ celle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{V}}' &= d(\overrightarrow{OO'})/dt \\ &= -d(\overrightarrow{O'O})/dt \\ &= -\vec{\mathrm{V}} \end{aligned}$$

Soit M un point quelconque de l'espace :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{r} = \vec{\mathrm{V}}'t + \vec{r}' \tag{1.1}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{\mathrm{V}}'t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\mathrm{V}}' + \vec{v}' \tag{1.2}$$

C'est la loi d'addition des vitesses en mécanique non relativiste. Elles ont pour nom respectif, vitesse *absolue*, vitesse *d'entraînement* et vitesse *relative*.

Notation 1.2.1. *La vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ est notée $\vec{v}_e$:*

$$\vec{\mathrm{V}}' = \vec{v}_e$$

La relation (1.1) s'écrit aussi :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x - v_{ex} t \\ y' = y - v_{ey} t \\ z' = z - v_{ez} t \end{cases}$$

$$t' = t$$

Groupe des transformations de Galilée

En prenant en compte les quatre types de liens entre référentiels galiléens, nous obtenons la *transformation de Galilée* :

$$\vec{r}' = R\vec{r} - \vec{v}_e t - \vec{d}$$
$$t' = t - \mathrm{t}$$

L'application successive de deux transformations de Galilée avec des vitesses d'entrainement arbitraires est équivalente à une unique transformation de Galilée. Elles forment le groupe à 10 paramètres appelé *groupe de Galilée inhomogène* :

a) translation dans l'espace avec trois composantes pour le déplacement $\vec{d}$

b) translation temporelle t

c) rotation statique dans l'espace avec trois angles d'Euler dans R

d) trois composantes pour la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$

En l'absence des translations dans l'espace et dans le temps, le groupe à 6 paramètres s'appelle *groupe de Galilée homogène*. L'invariance des lois physiques sous une transformation de Galilée est appelée *invariance galiléenne*, ou *principe de relativité galiléenne*.

Définition 1.2.3. *Configuration standard*
Deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en configuration standard ssi :

— *les centres des référentiels se croisent et se superposent à l'instant $t_0 = t'_0 = 0$*

— *on utilise des coordonnées rectangulaires dans l'espace-temps commun à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, les coordonnées galiléennes (t, x, y, z). L'axe temporel est représenté normal aux axes spatiaux*

— *le mouvement rectiligne n'a lieu que selon les axes Ox et $O'x'$ parallèles et de même sens (confondus car les centres se superposent), $v_{ey} = v'_{ey'} = v_{ez} = v'_{ez'} = 0$*

— *le mouvement de translation est tel que les axes Oy et $O'y'$ sont parallèles, donc aussi les axes Oz et $O'z'$ (pas de rotation statique)*

— *le mouvement uniforme de $\mathcal{R}'$ est dans le sens des x croissants. La vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ selon l'axe Ox est positive ou nulle, $v_{ex} = \|\vec{v}_e\| = v_e > 0$*

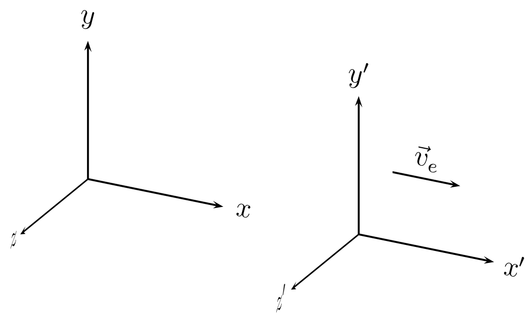

FIG. 1.1 – Référentiels en configuration standard

En configuration standard, la transformation de Galilée s'écrit :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{1.3}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La transformation de Galilée maintient invariante les équations de la dynamique de Newton (relation fondamentale de la dynamique) par changement de référentiel galiléen, mais pas les équations de l'électromagnétisme de Maxwell.

1.2.2 Théorie de la relativité restreinte

Référentiels galiléens

Comme précédemment, cette théorie est construite à partir du principe de relativité appliqué à une classe de référentiels équivalents. Les axiomes de cette théorie reprennent et généralisent les trois premières hypothèses du paragraphe 1.2.1 sur les différents liens entre les référentiels équivalents (translatés dans l'espace et/ou dans le temps, et tournés). Nous les remplaçons par des propriétés de l'espace et du temps, auxquels on ajoute la causalité et la loi de composition interne :

a) homogénéité de l'espace
b) homogénéité du temps
c) isotropie de l'espace
d) causalité : si un évènement est la cause d'un autre évènement, il doit en être ainsi dans tout référentiel. Cet axiome remplace celui d'un temps universel (car alors la causalité est vérifiée dans tout référentiel)
e) loi de composition interne : la composée de deux transformations est une transformation

À la fin du chapitre 2 p. 11 on démontre que le mouvement de translation rectiligne uniforme des référentiels équivalents est une conséquence de ces nouveaux axiomes. Nous pouvons alors définir les référentiels équivalents comme étant des référentiels dans lesquels l'espace est homogène et isotrope, et le temps homogène (causalité et loi de composition interne ne peuvent définir un référentiel). Nous retrouvons donc le status particulier des référentiels galiléens. Une autre conséquence est l'existence d'une vitesse limite pour les masses, l'énergie, les interactions et l'information, qui de fait invalide la transformation de Galilée puisque l'additivité des vitesses (relation (1.2) p. 5) interdit l'existence d'une vitesse limite.

Les référentiels galiléens ne constituant qu'une partie de l'ensemble de tous les référentiels possibles, cette nouvelle théorie est appelée *théorie de la relativité restreinte*. La théorie de la relativité galiléenne est aussi une théorie de la relativité restreinte mais cette appellation est réservée à la nouvelle théorie.

La relativité restreinte ne s'applique pas qu'aux référentiels galiléens, elle s'applique également aux référentiels accélérés, que l'accélération soit en translation, en rotation ou par changement de direction. Les référentiels galiléens sont seulement des référentiels équivalents pour la formulation des lois physiques. Cette équivalence vis-à-vis des lois de la physique ne leur confère aucun privilège. Nous pouvons faire un parallèle avec la mécanique non relativiste dans laquelle les référentiels galiléens ont aussi un rôle particulier, pour autant la relation fondamentale de la dynamique s'écrit aussi dans les référentiels accélérés.

Groupes des transformations de Lorentz-Poincaré

Le groupe à 10 paramètres des transformations inhomogènes de Galilée est remplacé par le groupe également à 10 paramètres des transformations de Lorentz-Poincaré dans lequel il existe une vitesse limite, appelé *groupe de Poincaré* :

a) une translation temporelle t

b) trois translations dans l'espace (trois composantes pour le déplacement $\vec{d}$)

c) trois rotations statiques dans l'espace (trois angles d'Euler dans R)

d) trois rotations statiques possibles entre une coordonnée spatiale et le temps

En l'absence de translation dans l'espace et dans le temps, le groupe à 6 paramètres s'appelle *groupe de Lorentz*. Ces transformations maintiennent invariantes par changement de référentiel galiléen les équations de Maxwell mais pas les équations de la dynamique de Newton qui sont modifiées pour être rendues invariantes. En ce sens, le principe de relativité n'a pas pour origine la relativité restreinte, mais la relativité restreinte l'a restauré pour inclure les équations de Maxwell, moyennant une réécriture de celles de Newton. Dans cette nouvelle théorie, les référentiels galiléens conservent la particularité de maintenir la forme des équations de la physique. L'invariance des lois physiques sous une transformation de Lorentz-Poincaré est appelée *invariance lorentzienne*. Lorsque nous parlerons de changement de référentiel galiléen, nous préciserons par quelle transformation, de Galilée ou de Lorentz. Nous établissons la transformation de Lorentz au chapitre 2 p. 11.

Référentiels inertiels

La relativité restreinte ne peut inclure la gravitation sous sa forme classique, car elle est modélisée par une force se propageant à vitesse infinie, en contradiction avec l'existence d'une vitesse limite comme conséquence des axiomes relativistes. Pour trouver un nouveau modèle pour la gravitation, nous partons du constat qu'il n'est pas possible de distinguer localement un référentiel en chute libre dans un champ de gravitation, d'un référentiel galiléen : c'est le *principe d'équivalence* entre gravitation et inertie. On définit alors une classe plus grande (incluant les référentiels galiléens) de référentiels équivalents pour les lois de la physique, appelés *référentiels d'inertie* ou *référentiels inertiels*. Ils suivent les géodésiques de l'espace-temps (ils sont en chute libre), et en l'absence de champ de gravitation ils se confondent avec les référentiels galiléens. Les lois de la physique s'écrivent sous la même forme dans tous les référentiels inertiels, elles ne permettent pas de les distinguer. C'est *le principe de covariance générale* des équations de la physique par changement de référentiel inertiel. Lorsque le principe de relativité s'applique aux référentiels inertiels, on parle de *théorie de la relativité générale.* Cette théorie montre que la matière et toutes les formes d'énergie courbent l'espace-temps. Loin de toute matière et de toute énergie, l'espace-temps plat dit *pseudo-euclidien* est celui de la relativité restreinte.

2 La transformation de Lorentz-Poincaré

2.1 Démonstration en supposant une vitesse limite

2.1.1 Principe de relativité

Nous supposons valide le principe de relativité qui affirme l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physique : aucune expérience de physique ne permet de les distinguer, définitions 1.1.2 et 1.1.3 p. 1. Nous supposons de plus que ces référentiels sont les référentiels galiléens, définition 1.2.1 p 4.

2.1.2 Vitesse de la lumière

On suppose l'existence d'une vitesse limite. Il est impossible de prouver expérimentalement que la lumière se propage à la vitesse limite. La seule chose que pourrait montrer une expérience serait que la lumière ne va pas à la vitesse limite. Lorsqu'une balance indique zéro on ne peut pas conclure, car soit la balance n'est pas assez précise soit l'objet pesé a effectivement un poids nul. Par analogie, une expérience qui n'indique pas de différence entre la vitesse de la lumière et la vitesse limite ne permet pas de conclure. Quant à la théorie, elle ne peut pas se prononcer sur ce qui se mesure, sauf à utiliser d'autres valeurs mesurées.

Remarque 2.1.1. *La transformation de Lorentz-Poincaré fait intervenir la vitesse limite, alors que les équations de Maxwell du champ électromagnétique font intervenir la vitesse de la lumière. Si l'on trouvait une masse (pour les anglophones une masse au repos) aux photons, la lumière n'irait pas à la vitesse limite et les équations de Maxwell ne seraient plus covariantes, définition 1.1.4 p.2. Il faudrait les réécrire.*

2.1.3 Invariants relativistes

Pour cette démonstration de la transformation de Lorentz-Poincaré on postule l'existence d'une vitesse limite. Cette vitesse étant une vitesse maximale, elle est invariante par changement de référentiel galiléen (elle a même valeur pour tous les observateurs galiléens) car sinon nous pourrions la dépacer par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond une transformation des coordonnées spatio-temporelles, chaque référentiel ayant a priori son propre système de coordonnées spatio-temporelles. La transformation de coordonnées que l'on cherche doit laisser invariante la vitesse limite, que l'on note c.

À partir de la vitesse limite on déduit un deuxième *invariant relativiste*, ou *invariant de Lorentz*, qui fait intervenir les coordonnées spatio-temporelles :

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 p. 6). Imaginons qu'à l'origine spatiale $O(0,0,0)$ de $\mathcal{R}$ se produise un flash à l'instant initial $t_0 = t'_0 = 0$. Pour simplifier, on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite c. Un observateur dans $\mathcal{R}$ voit une sphère de lumière de centre O s'étendre dans l'espace, d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \tag{2.1}$$

En relativité restreinte comme en mécanique non relativiste, un observateur dans $\mathcal{R}'$ voit aussi une sphère de lumière s'étendre dans l'espace. Cependant, par invariance isotrope de c, en relativité la sphère de lumière vue par un observateur dans $\mathcal{R}'$ n'a pas pour centre O mais O', et a pour équation dans $\mathcal{R}'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

L'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, c'est donc un invariant relativiste. Si le flash a lieu en un point quelconque de coordonnées galiléennes (t_0, x_0, y_0, z_0) :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2(t - t_0)^2$$
$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t)^2$$

Notation 2.1.1. *Nous utiliserons l'abus d'écriture suivant :*

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$$

2.1.4 Distance spatiale

L'espace physique de la physique non relativiste est *absolu*, il existe en lui-même indépendamment de l'existence d'autre chose. Nul besoin de matière ou d'énergie pour qu'existe cet espace. Le temps est également absolu, il existe même si rien ne se passe. L'espace physique et le temps n'ayant pas les mêmes unités, il n'y a pas à proprement parler d'espace-temps car on ne pourrait y définir une distance. On peut faire une analogie avec la thermodynamique, le diagramme (P, V) de Clapeyron est un exemple d'espace au sens mathématique du terme, dans lequel on ne peut définir de distance car les axes n'ont pas les mêmes unités. L'espace et le temps de la physique non relativiste sont modélisés par deux espaces mathématiques distincts dont le produit cartésien est noté $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Soient deux points de coordonnées spatiales rectangulaires (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1). Le carré de leur distance spatiale est donnée par la double application du théorème de Pythagore, d'abord dans le plan (x, y) puis dans l'espace (x, y, z) :

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\right)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Utilisons la transformation de Galilée (1.3) p. 7 pour le changement de référentiel galiléen :

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 - v_e t \\ y'_0 = y_0 \\ z'_0 = z_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - v_e t \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases}$$

La distance spatiale entre les deux points se transforme en :

$$\begin{aligned} d'^2 &= (x'_1 - x'_0)^2 + (y'_1 - y'_0)^2 + (z'_1 - z'_0)^2 \\ &= [(x_1 - v_e t) - (x_0 - v_e t)]^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \\ &= d^2 \end{aligned}$$

Elle est donc invariante par la partie spatiale de la transformation de Galilée.

De même, la distance temporelle ou durée, est invariante par la partie temporelle de la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_1 - t'_0 \\ &= t_1 - t_0 \\ &= \Delta t \end{aligned}$$

2.1.5 Distance spatio-temporelle

En relativité restreinte, l'espace et le temps sont liés par la constante c homogène à une vitesse (un espace divisé par un temps). Ils forment *l'espace-temps* ou *univers*, dans lequel c est une vitesse limite pour la matière, l'énergie, les interactions et l'information. c est aussi appelée *constante de structure de l'espace-temps* ou *constante chronogéométrique*.

En multipliant la coordonnée temporelle par cette constante nous obtenons la coordonnée ct homogène à une longueur, n'ayant pas le même status que les coordonnées x, y, z mais permettant de définir une distance dans l'espace-temps. Cette « quadridistance » est appellée *intervalle*, sous-entendu entre deux points ayant chacun quatre coordonnées. Un espace dans lequel on peut définir une distance est dit *métrique*[1], sinon il est dit *affine*. Ainsi, l'espace et le temps de la physique non relativiste sont deux espaces métriques distincts, et leur « réunion » n'est pas un espace métrique, alors que l'espace-temps de la relativité est un espace métrique.

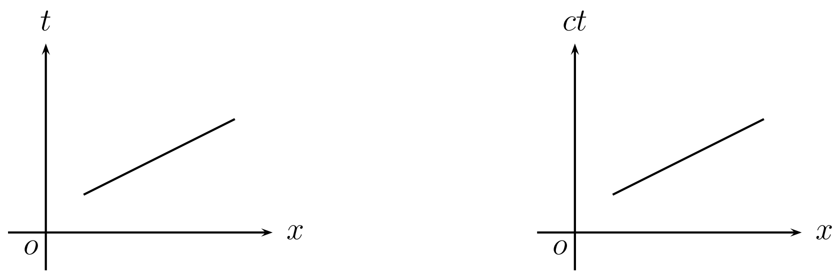

FIG. 2.1 – Espace affine et espace métrique

Figure 2.1 (les coordonnées y et z ne sont pas représentées) :

— en coordonnées galiléennes (t, x, y, z), la longueur d'un segment n'a pas de sens précis, les coordonnées n'ont pas la même dimension, l'espace n'est pas métrique

— en *coordonnées galiléennes réduites* (ct, x, y, z), la longueur d'un segment existe et on peut la mesurer. Les coordonnées ont même dimension, une longueur, et définissent un espace métrique. Sur l'axe des ordonnées les durées sont transformées en distances lumière, avec 1 s = 299 792 458 m. Le temps est mesuré en mètres, les vitesses ont pour unité le m/m, en particulier c = 299 792 458 m/m.

1. du grec $\mu\epsilon\tau\rho o\upsilon$, mesure

Remarque 2.1.2. *En principe on ne devrait pas simplifier les unités. Par exemple, si l'on dit qu'un projet prend un mois de retard tous les vingt-quatre mois, on ne peut simplifier par « mois ». Un second exemple : la vitesse d'un cours d'eau augmente à mesure que l'on s'éloigne de la berge, cette variation de vitesse se mesure en* (m/s)/m. *Si l'on simplifie les unités on obtient des Hertz pour cette variation de vitesse.*

Toujours figure 2.1, les échelles de distance ne sont pas les mêmes, des mètres en abscisse et des « trois centaines de milliers de kilomètres » en ordonnée.

Remarque 2.1.3. *Un cas similaire existe en mécanique non relativiste. Dans l'aviation on mesure les altitudes en centaines de pieds ou flight level (FL) et les distances sol en milles marins ou nautical miles (NM). Difficile dans ces conditions d'évaluer une distance autre qu'une différence d'altitude ou qu'une distance sol.*

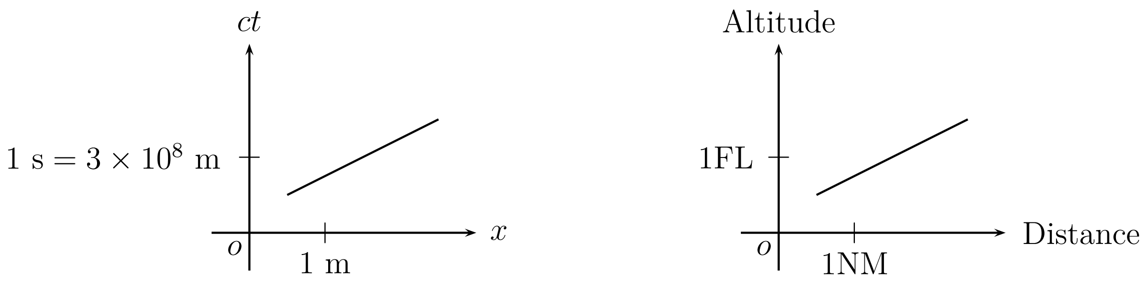

Fig. 2.2 – Unités d'un espace métrique

Pour cette raison nous redéfinissons le mètre (et non la seconde car dans le système international d'unités (SI) le mètre est défini à partir de la seconde et de la vitesse de la lumière) pour avoir la même unité en abscisse et en ordonnée, c'est-à-dire nous posons

$$c = 1 \tag{2.3}$$

Dans ce *système d'unités géométriques*, il n'y a plus lieu de distinguer l'unité de temps de l'unité de distance. 299 792 458 mètres SI valent un mètre dans ce système.

L'espace et le temps ne sont plus absolus puisqu'ils se combinent l'un dans l'autre, mais l'espace-temps prend un caractère *absolu*. Il est modélisé par un espace métrique mathématique de dimension quatre noté $\mathbb{R}^4$, appelé *espace de Poincaré-Minkowski*, de système de coordonnées (t, x, y, z) où $c = 1$. Tout comme l'espace est constitué de l'ensemble des points de cet espace, l'espace-temps est constitué de l'ensemble des *évènements* ou *points d'univers*.

Remarque 2.1.4. *Le terme « évènement » existe aussi en mécanique non relativiste où il a pour coordonnées* (t, x, y, z)*, mais où le temps est universel.*

Les évènements ont pour coordonnées (ct, x, y, z) si l'on donne la composante temporelle avant les composantes spatiales, ou (x, y, z, ct) dans le cas contraire. Nous choisissons la première convention est posons la définition suivante :

Notation 2.1.2. *Notation indicielle*
Les coordonnées galiléennes réduites sont notées x^α *avec* $\alpha = 0, \ldots, 3$ *:*

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z$$

Elles ont la dimension d'une longueur. Lorsque $c = 1$ elles ont même unité.

L'espace-temps est absolu signifie que les évènements sont absolus, ils existent en eux-mêmes indépendamment de tout référentiel ou de tout observateur. Le choix d'un référentiel (avec son espace, son temps, son système de coordonnées et son horloge) pour localiser un évènement est arbitraire, par conséquent les coordonnées spatio-temporelles des évènements ont le même arbitraire.

Nous cherchons à généraliser la distance spatiale entre deux points de l'espace physique tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Galilée, à une distance spatio-temporelle entre deux évènements de l'espace-temps quadri-dimensionnel $\mathbb{R}^4$, invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré (qui laisse également invariante c).

De même qu'en mathématique la distance entre deux points d'un espace est invariante par changement de coordonnées, en relativité la distance spatio-temporelle entre deux évènements de l'espace-temps est invariante par changement de coordonnées spatio-temporelle, c'est-à-dire par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Équivalence de vocabulaire selon que l'on met en avant l'aspect mathématique ou physique :

Mathématique	Physique
variété ou espace	espace-temps ou univers
point - vecteur	évènement - quadrivecteur
distance - norme	intervalle
système de coordonnées - repère	référentiel
chgt de coordonnées - chgt de base	chgt de référentiel ou transformation de Lorentz-Poincaré
espace pré-euclidien	espace plat
espace non-euclidien	espace courbe

2.1.6 Équation de la sphère de lumière

L'équation de la sphère de lumière 2.1 p. 12 étant la même dans tous les référentiels galiléens, cela suggère de poser l'une des deux définitions suivantes,

$$\Delta s^2 \triangleq c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

en convention dite « de genre temps » (Δs^2 est positif ssi la distance lumière est supérieure à la distance spatiale), ou

$$\Delta s^2 \triangleq \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$$

en convention dite « de genre espace ».

Ces expressions rappellent celle (2.2) p. 12 du carré de la distance euclidienne en trois dimensions d'espace. Au paragraphe 2.1.3 p. 11, nous avons vu que si s^2 est nul dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors il est nul dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$

$$\Delta s^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta s'^2 = 0$$

autrement dit s^2 et s'^2 sont proportionnels :

$$\Delta s^2 = a\Delta s'^2$$

2.1.7 Espace homogène et isotrope, temps homogène

L'espace étant supposé homogène, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'endroit où elle est faite, le facteur de proportionnalité a ne peut être fonction des coordonnées. Le temps étant également supposé homogène, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'époque à laquelle elle est faite, a ne peut être fonction du temps. L'espace étant supposé isotrope, toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'orientation choisie, a ne peut être fonction de la direction de la vitesse d'entrainement des référentiels. a n'est donc fonction que de la norme euclidienne de la vitesse d'entrainement des référentiels :

$$\Delta s^2 = a(v_e)\Delta s'^2$$

2.1.8 Loi de composition interne

Si l'on considère trois référentiels galiléens, alors :

$$\begin{cases} \Delta s_1^2 = a(v_{12})\Delta s_2^2 \\ \Delta s_2^2 = a(v_{23})\Delta s_3^2 \\ \Delta s_1^2 = a(v_{13})\Delta s_3^2 \end{cases}$$

soit,

$$\Delta s_1^2 = a(v_{12})a(v_{23})\Delta s_3^2$$
$$a(v_{13}) = a(v_{12})a(v_{23})$$

v_{13} dépend non seulement des valeurs v_{12} et v_{23}, mais aussi de l'angle entre les vecteurs $\vec{v}_{12}$ et $\vec{v}_{23}$. Par conséquent a est une constante et nous avons :

$$a = a^2$$

Cela laisse deux possibilités, $a = 0$ donne $\Delta s = 0$, et $a = 1$ donne :

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \tag{2.4}$$

qui inclue le cas $a = 0$. Δs est la distance spatio-temporelle quadridimensionnelle que l'on cherchait, invariante par changement de référentiel galiléen par une transformation qui laisse invariante c, donc absolue dans l'espace-temps.

Définition 2.1.1. *Intervalle d'espace-temps*
La distance dans l'espace-temps entre deux évènements, notée s, telle qu'en convention de genre temps son carré s'écrive

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &\triangleq c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &\triangleq (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2 \end{aligned}$$

est appelée distance d'univers, intervalle d'espace-temps ou métrique de Minkowski.

Le scalaire s invariant de Lorentz, est appelé *scalaire de Lorentz* ou *quadri-scalaire* (bien qu'il n'ait pas quatre composantes).

En convention de genre temps, le carré d'un intervalle élémentaire d'univers s'écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

2.1.9 Signature de la métrique de l'espace-temps

En convention de genre temps, la métrique a pour signature $(1,3)$, ou le premier entier indique le nombre de signes positifs, et le second indique le nombre de signes négatifs. On donne souvent la signature sous forme explicite $(+,-,-,-)$. En convention de genre espace, la métrique a pour signature $(3,1)$, sous forme explicite $(-,+,+,+)$. La loi d'inertie de Sylvester stipule que la signature d'une métrique est indépendante du système de coordonnées choisi.

Définition 2.1.2. *Espace de Lorentz*
Un espace de Lorentz de dimension n est un espace qui a pour signature $(1,n-1)$ ou $(n-1,1)$, noté respectivement $\mathbb{R}^{1,n-1}$ ou $\mathbb{R}^{n-1,1}$.

L'espace de Poincaré-Minkowski est un espace de Lorentz de dimension 4, noté au choix $\mathbb{R}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{3,1}$.

2.1.10 Relativité du mouvement

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 p. 6). Imaginons deux règles identiques placées à l'origine des référentiels, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement relatif. À l'instant où elles se croisent, par symétrie elles doivent avoir même hauteur, ce qui implique $y=y'$ et $z=z'$. Imaginons deux règles identiques, chacune dans un référentiel, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement. Par conséquent, nous cherchons une transformation de système de coordonnées spatio-temporelle sous la forme de deux fonctions inversibles f et g, telles que

$$\begin{cases} t' = f(t,x) \\ x' = g(t,x) \\ y' = y & (2.5a) \\ z' = z & (2.5b) \end{cases}$$

qui respectent l'invariance de l'intervalle d'univers :

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$
$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

Prenons un intervalle élémentaire :

$$\begin{aligned}
c^2dt^2 - dx^2 =& c^2dt'^2 - dx'^2 \\
=& c^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dx\right)^2 \\
=& c^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 dt^2 + c^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2c^2\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}dt\,dx \\
& - \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 dt^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 dx^2 - 2\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x}dt\,dx \\
=& \left[c^2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right]dt^2 - \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 \\
& + 2\left(c^2\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dt\,dx
\end{aligned}$$

qui donne le système :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 = 1 & \text{(2.6a)} \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - \left(c\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 & \text{(2.6b)} \\ c^2\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 & \text{(2.6c)} \end{cases}$$

Avec la relation de trigonométrie hyperbolique

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} \qquad \cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi) = 1$$

la relation (2.6a) a pour solutions :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = \cosh^2[\varphi(t,x)] \\ \left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 = \sinh^2[\varphi(t,x)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \pm\cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \pm c\sinh[\varphi(t,x)] \end{cases}$$

Remarque 2.1.5. *La dérivée partielle d'une fonction de t et x est une fonction de t et x.*

$$f(t,x) \Rightarrow \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$$

Quatre combinaisons de signes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = c\sinh[\varphi(t,x)] \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = -c\sinh[\varphi(t,x)] \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = c\sinh[\varphi(t,x)] \end{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = -c\sinh[\varphi(t,x)] \end{cases}$$

Prenons le premier ensemble de solutions et posons $t = -\phi$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial \phi} = \cosh[\varphi(-\phi,x)] \\ -\dfrac{\partial g}{\partial \phi} = c\sinh[\varphi(-\phi,x)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \phi} = -\cosh[\varphi(\phi,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial \phi} = c\sinh([\varphi(\phi,x)] \end{cases}$$

On retrouve le troisième ensemble de solutions. Prenons le deuxième ensemble de solutions et posons $t = -\phi$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial \phi} = \cosh[\varphi(-\phi,x)] \\ -\dfrac{\partial g}{\partial \phi} = -c\sinh[\varphi(-\phi,x)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \phi} = -\cosh[\varphi(\phi,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial \phi} = -c\sinh[\varphi(\phi,x)] \end{cases}$$

On retrouve le quatrième ensemble de solutions. Il n'y a donc que deux combinaisons de signes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \varepsilon_1 c\ \sinh[\varphi(t,x)] \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_1^2 = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Par analogie (2.6b) a pour solutions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \cosh[\varphi(t,x)] \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\varepsilon_2}{c} \sinh[\varphi(t,x)] \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_2^2 = 1 \end{cases}$$

où la fonction $\varphi(t,x)$ est la même qu'en (2.7). Remplaçons dans (2.6c) :

$$\begin{aligned} c^2 \cosh[\varphi(t,x)]\, \tfrac{\varepsilon_2}{c} \sinh[\varphi(t,x)] - c\varepsilon_1 \sinh[\varphi(t,x)] \cosh[\varphi(t,x)] &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cosh[\varphi(t,x)] \sinh[\varphi(t,x)] &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(\frac{e^{[\varphi(t,x)]} + e^{-[\varphi(t,x)]}}{2} \right) \left(\frac{e^{[\varphi(t,x)]} - e^{-[\varphi(t,x)]}}{2} \right) &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(e^{[\varphi(t,x)]} e^{[\varphi(t,x)]} - e^{[\varphi(t,x)]} e^{-[\varphi(t,x)]} + e^{-[\varphi(t,x)]} e^{[\varphi(t,x)]} - e^{-[\varphi(t,x)]} e^{-[\varphi(t,x)]} \right) &= 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left(e^{2\varphi(t,x)} - e^{-2\varphi(t,x)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Deux possibilités :

a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

b) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

$$\begin{aligned} e^{2\varphi(t,x)} &= e^{-2\varphi(t,x)} \\ e^{2\varphi(t,x)} &= 1 \\ \varphi(t,x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} f = t + c^{ste} \\ g = x + c^{ste} \end{cases}$$

Par conséquent $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et le système devient :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{1}{c^2} \left(\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - c^2 \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{1}{c^2} \left(\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

Les dérivées partielles des deux dernières relations donnent les équations de propagation d'une onde à la vitesse c :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 & (2.8a) \\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial t}\right)^2 = 1 & (2.8b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

a) La solution générale de (2.8a) est de la forme :

$$\begin{aligned} f(t,x) &= A\left(t - \frac{x}{c}\right) + B\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ &= A(u) + B(v) \end{aligned}$$

où A et B sont des fonctions arbitraires.

$$\begin{aligned} df(t,x) &= df(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx &= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv \\ &= \frac{\partial A}{\partial u}\left(dt - \frac{dx}{c}\right) + \frac{\partial B}{\partial v}\left(dt + \frac{dx}{c}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\right)dt + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u}\right)dx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial B}{\partial v} + \dfrac{\partial A}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial B}{\partial v} - \dfrac{\partial A}{\partial u}\right) \end{cases}$$

En reportant dans l'équation de propagation de f, (2.8a) p. 20 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial u}\right)^2 &= 1 \\ 2\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u} + 2\frac{\partial B}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u} &= 1 \\ \frac{\partial A(u)}{\partial u}\frac{\partial B(v)}{\partial v} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A(u)}{\partial u} = C_1^{ste} \\ \dfrac{\partial B(v)}{\partial v} = \dfrac{1}{4C_1^{ste}} \end{cases}$$

Or,

$$\begin{aligned} dA(u) &= \frac{\partial A}{\partial u}du \\ dA\left(t - \frac{x}{c}\right) &= \frac{\partial A}{\partial u}\left(dt - \frac{dx}{c}\right) \\ \frac{\partial A}{\partial t}dt + \frac{\partial A}{\partial x}dx &= \frac{\partial A}{\partial u}dt - \frac{\partial A}{\partial u}\frac{dx}{c} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = \dfrac{\partial A}{\partial u} \\ \dfrac{\partial A}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A}{\partial u} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t} = C_1^{ste} \\ \dfrac{\partial A}{\partial x} = -\dfrac{C_1^{ste}}{c} \end{cases}$$

De même,

$$
\begin{aligned}
dB(v) &= \frac{\partial B}{\partial v}\,dv \\
dB\left(t+\frac{x}{c}\right) &= \frac{\partial B}{\partial v}\left(dt+\frac{dx}{c}\right) \\
\frac{\partial B}{\partial t}\,dt+\frac{\partial B}{\partial x}\,dx &= \frac{\partial B}{\partial v}\,dt+\frac{\partial B}{\partial v}\,\frac{dx}{c}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{\partial B}{\partial v} \\
\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\,\dfrac{\partial B}{\partial v}
\end{cases}
\qquad \Rightarrow \qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{1}{4C_1^{ste}} \\
\dfrac{\partial B}{\partial x} = \dfrac{1}{4cC_1^{ste}}
\end{cases}
$$

On pose $C_1^{ste} = 1/(2a)$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial A}{\partial u} = \dfrac{1}{2a} \\
\dfrac{\partial B}{\partial v} = \dfrac{a}{2}
\end{cases}
\qquad \Rightarrow \qquad
\begin{cases}
A(u) = \dfrac{1}{2a}\,u + C_2^{ste} \\
B(v) = \dfrac{a}{2}\,v + C_3^{ste}
\end{cases}
$$

Nous avons maintenant :

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= A(u)+B(v) \\
&= \frac{1}{2a}\,u + C_2^{ste} + \frac{a}{2}\,v + C_3^{ste} \\
&= \frac{1}{2a}\,u + \frac{a}{2}\,v + C_4^{ste}
\end{aligned}
$$

On pose $f(0,0) = f_0 = C_4^{ste}$:

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= \frac{1}{2a}\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{a}{2}\left(t+\frac{x}{c}\right)+f_0 \\
&= \left(\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}\right)t+\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)\frac{x}{c}+f_0 \\
&= \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)t+\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)\frac{x}{c}+f_0
\end{aligned}
$$

On choisit $a > 0$ pour avoir les axes temporels dans le même sens.

$$
f(t,x) = \frac{1+a^2}{2a}\left[t-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\frac{x}{c}\right]+f_0 \tag{2.9}
$$

On pose :

$$
\beta = \frac{1-a^2}{1+a^2} \quad \text{donc} \quad |\beta| \leqslant 1
$$

Si $\beta = 1$ alors $a = 0$ et le facteur $(1+a^2)/(2a)$ dans (2.9) diverge, donc on ne conserve que

$$
|\beta| < 1
$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \frac{1-2a^2+a^4}{1+2a^2+a^4} \\
1-\beta^2 &= \frac{1+2a^2+a^4-1+2a^2-a^4}{1+2a^2+a^4} \\
&= \frac{4a^2}{1+2a^2+a^4} \\
\sqrt{1-\beta^2} &= \frac{2a}{1+a^2}
\end{aligned}$$

(2.9) p. 21 devient :

$$f(t,x) = \frac{t-\beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} + f_0$$

$t' = t + t_0$ à vitesse d'entrainement nulle, d'où $f_0 = t_0$:

$$t' = \frac{t-\beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} + t_0 \quad \text{avec} \quad |\beta| < 1 \tag{2.10}$$

b) La solution générale de (2.8b) p. 20 est de la forme :

$$\begin{aligned}
g(t,x) &= C\left(t-\frac{x}{c}\right) + D\left(t+\frac{x}{c}\right) \\
&= C(u) + D(v)
\end{aligned}$$

où C et D sont des fonctions arbitraires.

$$\begin{aligned}
dg(t,x) &= dg(u,v) \\
\frac{\partial g}{\partial t}\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}\,dx &= \frac{\partial g}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial v}\,dv \\
&= \frac{\partial C}{\partial u}\left(dt - \frac{dx}{c}\right) + \frac{\partial D}{\partial v}\left(dt + \frac{dx}{c}\right) \\
&= \left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial v}\right)dt + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right)dx
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial C}{\partial u} + \dfrac{\partial D}{\partial v} \\
\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\right)
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad
\begin{cases}
c^2\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial C}{\partial u} + \dfrac{\partial D}{\partial v} \\
\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\right)
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
c\left(\dfrac{\partial B}{\partial v} - \dfrac{\partial A}{\partial u}\right) = \dfrac{\partial C}{\partial u} + \dfrac{\partial D}{\partial v} \\
\dfrac{\partial A}{\partial u} + \dfrac{\partial B}{\partial v} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\right)
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial D}{\partial v} + \dfrac{\partial C}{\partial u} = c\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a}\right) \\
\dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u} = c\left(\dfrac{1}{2a} + \dfrac{a}{2}\right)
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial D}{\partial v} = \dfrac{ca}{2} \\
\dfrac{\partial C}{\partial u} = -\dfrac{c}{2a}
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
D = \dfrac{ca}{2}v + C_5^{ste} \\
C = -\dfrac{c}{2a}u + C_6^{ste}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
g(u,v) &= C(u) + D(v) \\
&= -\frac{c}{2a}u + \frac{ca}{2}v + C_7^{ste}
\end{aligned}$$

On pose $g(0,0) = g_0$:

$$\begin{aligned} g(t,x) &= -\frac{c}{2a}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{ca}{2}\left(t + \frac{x}{c}\right) + g_0 \\ &= \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2a}\right) ct + \left(\frac{1}{2a} + \frac{a}{2}\right) x + g_0 \\ &= \left(\frac{a^2 - 1}{2a} ct + \frac{1 + a^2}{2a} x\right) + g_0 \\ &= \frac{1 + a^2}{2a}\left(x - \frac{1 - a^2}{1 + a^2} ct\right) + g_0 \\ &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} + g_0 \end{aligned}$$

$x' = x + x_0$ à vitesse d'entrainement nulle d'où $g_0 = x_0$:

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} + x_0 \quad \text{avec} \quad |\beta| < 1 \tag{2.11}$$

Lorsque v_e devient petite devant c nous devons retrouver la transformation de Galilée (1.3) p. 7 qui est validée par toute la physique non relativiste. On en déduit

$$\boxed{\beta = v/c} \tag{2.12}$$

car alors (2.10) et (2.11) deviennent

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} + t_0 \quad \text{avec} \quad v_e < c \\ x' = \dfrac{x - v_e t}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} + x_0 \quad \text{avec} \quad v_e < c \end{cases}$$

et pour $v_e \ll c$ on retrouve bien la transformation de Galilée (1.3) p. 7 :

$$\begin{cases} t' \approx t + t_0 \\ x' \approx x - v_e t + x_0 \end{cases}$$

On rappelle que $v_e = \|\vec{v}_e\|$, autrement dit v_e n'est pas algébrique mais toujours positive ou nulle. v_e positive implique que le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace dans le sens des x croissants, et réciproquement, le référentiel $\mathcal{R}$ se déplace dans le sens des x' décroissants.

2.1.11 La transformation spéciale de Lorentz

Les référentiels galiléens sont supposés en configuration standard, ils se croisent à l'instant $t = t' = 0$, par conséquent $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$, et les relations (2.5a) et (2.5b) p. 17, (2.10) et (2.11) p. 22 donnent finalement la *transformation spéciale de Lorentz* :

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - v_e x/c^2}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x - v_e t}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

La transformation est dite « spéciale » parce qu'elle n'inclue pas les trois rotations statiques ordinaires de l'espace (les référentiels galiléens sont supposés en configuration standard).

DÉFINITION 2.1.3. *Facteur relativiste*
On définit le facteur relativiste par :

$$\gamma_e \triangleq \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}$$

Ce facteur sans dimension est aussi appelé *facteur de Lorentz* ou *coefficient de parallaxe spatio-temporelle*. Pour toute vitesse relative ou vitesse d'entrainement, il existe un facteur relativiste. Lorsque il y a plusieurs vitesses il faut préciser de quel facteur relativiste l'on parle. De plus :

$$0 \leqslant v_e < c \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_e \geqslant 1 \tag{2.13}$$

2.1.12 Symétrie de la transformation de Lorentz

La transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - v_e x/c^2\right) \\ x' = \gamma_e \left(x - v_e t\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ct' = \gamma_e \left(ct - x v_e/c\right) \\ x' = \gamma_e \left(x - ct v_e/c\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

La transformation de Lorentz est symétrique en x et ct. Utilisons (2.12) p. 23 pour la vitesse d'entrainement des deux référentiels galiléens,

$$\beta_e = v_e/c$$

qui donne

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) & (2.14a) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) & (2.14b) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e\beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e\beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 2.1.4. *Matrice de Lorentz*
La matrice changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz est appelée matrice de Lorentz :

$$\Lambda \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e\beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e\beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de Lorentz est habituellement notée avec la lettre grecque lambda majuscule en l'honneur de Lorentz. Remplacer la vitesse d'entrainement v_e par β_e c'est faire la moitié du chemin. Remplaçons toutes les vitesses v par v/c, y compris c. Cela revient à poser $c = 1$ et l'on retrouve (2.3) p. 14. Nous avons alors :

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e\,(ct - xv_e/c) \\ x' = \gamma_e\,(x - ctv_e/c) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = \gamma_e(t - v_e x) \\ x' = \gamma_e(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour passer de $c = 299\ 792\ 458$ m/s à $c = 1$ dans la transformation de Lorentz-Poincaré, on utilisera le passage :

$$\begin{cases} ct \to t \\ ct' \to t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \to t/c \\ t' \to t'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt \to dt/c \\ dt' \to dt'/c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt^2 \to dt^2/c^2 \\ dt'^2 \to dt'^2/c^2 \end{cases}$$

Par exemple pour la vitesse,

$$\begin{cases} dr/dt \to cdr/dt \\ dr'/dt \to cdr'/dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \to cv \\ v' \to cv' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v/c \to v \\ v'/c \to v' \end{cases}$$

et pour l'accélération :

$$\begin{cases} d^2r/dt^2 \to c^2 d^2r/dt^2 \\ d^2r'/dt^2 \to c^2 d^2r'/dt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \to c^2 a \\ a' \to c^2 a' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a/c^2 \to a \\ a'/c^2 \to a' \end{cases}$$

Après utilisation de la transformation de Lorentz-Poincaré avec $c = 1$, si l'on souhaite revenir à $c = 299\ 792\ 458$ m/s on utilisera le passage :

$$\begin{cases} t \to ct \\ t' \to ct' \end{cases} \qquad \begin{cases} v \to v/c \\ v' \to v'/c \end{cases}$$

En notation indicielle, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^{\mu'} = \Lambda_0^{\mu'} x^0 + \Lambda_1^{\mu'} x^1 + \Lambda_2^{\mu'} x^2 + \Lambda_3^{\mu'} x^3$$

La notation incicielle permet d'adopter la *convention de sommation* suivante :

NOTATION 2.1.3. *Toutes les fois que dans un monôme (expression de la forme ax^n) figure le même indice en haut et en bas, nous devons sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.*

En notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^{\mu'} = \Lambda_\nu^{\mu'} x^\nu$$

On obtient la transformation inverse de deux façons :

— En inversant les relations (2.15) p. 25 ($c = 1$) :

$$\begin{cases} t'/\gamma_e = t - v_e x \\ x'/\gamma_e = x - v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t'/\gamma_e + v_e x \\ x = x'/\gamma_e + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = t'/\gamma_e + v_e x'/\gamma_e + v_e^2 t \\ x = x'/\gamma_e + v_e t'/\gamma_e + v_e^2 x \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} t\left(1 - v_e^2\right) = \left(t' + v_e x'\right)/\gamma_e \\ x\left(1 - v_e^2\right) = \left(x' + v_e t'\right)/\gamma_e \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \gamma_e\left(t' + v_e x'\right) \\ x = \gamma_e\left(x' + v_e t'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Du point de vue du référentiel $\mathcal{R}'$ le référentiel $\mathcal{R}$ se déplace selon les x' décroissants, sa vitesse relative est dans l'autre sens car nous avons choisi d'orienter les axes x et x' dans le même sens.

— En permutant les coordonnées entre référentiels et en remplaçant v_e par $-v_e$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e(t' + v_e x') \\ x = \gamma_e(x' + v_e t') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e v_e & 0 & 0 \\ \gamma_e v_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.6. *Notez bien que quel que soit le problème à résoudre, on a toujours la possibilité de choisir entre la transformation de Lorentz directe et celle inverse. La résolution est plus ou moins rapide selon ce choix.*

2.1.13 Transformation de Lorentz sous forme intrinsèque

Dans le cas de la transformation de Lorentz sous forme intrinsèque, les origines des référentiels se croisent à $t = t' = 0$, leurs axes sont parallèles mais leur vitesse relative n'est pas selon l'axe des x.

Soit M un évènement, on pose $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ le vecteur position de M dans $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}'$ son vecteur position dans $\mathcal{R}'$. On note $\vec{r}_{||}$ le vecteur position parallèle à $\vec{v}_e$ et $\vec{r}_\perp$ le vecteur position perpendiculaire à $\vec{v}_e$, de sorte que :

$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_\perp \qquad \text{et} \qquad \vec{r}' = \vec{r}'_{||} + \vec{r}'_\perp$$

La transformation spéciale de Lorentz (2.15) p. 25 ($c = 1$) donne directement :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_e\left(t - \vec{v}_e \cdot \vec{r}\right) \\ \vec{r}'_{||} &= \gamma_e(\vec{r}_{||} - \vec{v}_e t) \\ \vec{r}'_\perp &= \vec{r}_\perp \end{aligned}$$

D'où la relation entre $\vec{r}'$ et $\vec{r}$:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \gamma_e(\vec{r}_{||} - \vec{v}_e t) + \vec{r}_\perp \\ &= \vec{r} + (\gamma_e - 1)\vec{r}_{||} - \gamma_e \vec{v}_e t \end{aligned}$$

Or nous avons aussi,

$$\vec{r}_{||} = \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{r}}{v_e^2}\,\vec{v}_e$$

donc, $(c = 1)$,

$$\begin{cases} t' = \gamma_e \left(t - \vec{v}_e \cdot \vec{r}\right) & (2.16a) \\ \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma_e - 1)\dfrac{\vec{v}_e \cdot \vec{r}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e \vec{v}_e t & (2.16b) \end{cases}$$

On obtient la transformation inverse en permutant $\vec{r}$ et $\vec{r}'$, t et t', et en changeant $\vec{v}_e$ en $-\vec{v}_e$:

$$\begin{cases} t = \gamma_e \left(t' + \vec{v}_e \cdot \vec{r}'\right) \\ \vec{r} = \vec{r}' + (\gamma_e - 1)\dfrac{\vec{v}_e \cdot \vec{r}'}{v_e^2}\,\vec{v}_e + \gamma_e \vec{v}_e t' \end{cases}$$

2.2 Démonstration sans l'hypothèse d'une vitesse limite

2.2.1 Principe de relativité

Ici aussi nous supposons valide le principe de relativité qui affirme l'existence de référentiels équivalents pour la formulation des lois physique. Nous ne faisons pas plus d'hypothèses concernant ces référentiels, en particulier nous ne supposons pas qu'ils se déplacent à vitesse constante les uns par rapport aux autres. Cette propriété sera l'une des conséquences des hypothèses que nous allons poser par la suite.

Cherchons les formules générales de transformation des coordonnées d'espace et de temps lors d'un changement de référentiel équivalent, que nous avons appelée transformation inertielle. Soient (t, x, y, z) les coordonnées galiléennes d'un évènement dans le référentiel équivalent $\mathcal{R}$, et (t', x', y', z') les coordonnées du même évènement dans un autre référentiel équivalent $\mathcal{R}'$. La transformation des coordonnées galiléennes pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ dépend d'un nombre à déterminer N de paramètres $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; a_1, ..., a_N) \\ y' = g(t, x, y, z; a_1, ..., a_N) \\ z' = h(t, x, y, z; a_1, ..., a_N) \\ t' = j(t, x, y, z; a_1, ..., a_N) \end{cases}$$

Les translations dans l'espace et/ou dans le temps sont supposées laisser invariantes les lois de la physique, ce qui fixe quatre de ces N paramètres :

$$\begin{cases} x' = x + \xi_1 \\ y' = y + \xi_2 \\ z' = z + \xi_3 \\ t' = t + \tau \end{cases}$$

Il reste donc $N - 4$ paramètres à déterminer, de a_5 à a_N. Les paramètres connus sont ξ_1, ξ_2, ξ_3 et τ :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, ..., a_N) \\ y' = g(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, ..., a_N) \\ z' = h(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, ..., a_N) \\ t' = j(t, x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau, a_5, ..., a_N) \end{cases}$$

x' ne dépend pas des paramètres ξ_2, ξ_3 et τ, c'est-à-dire des translations des autres coordonnées. De même pour les coordonnées y', z' et t'. En posant $n = N - 4$:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y, z; \xi_1, a_1, ..., a_n), \\ y' = g(t, x, y, z; \xi_2, a_1, ..., a_n), \\ z' = h(t, x, y, z; \xi_3, a_1, ..., a_n), \\ t' = j(t, x, y, z; \tau, a_1, ..., a_n). \end{cases}$$

On utilise les paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 et τ pour que l'origine spatio-temporelle des deux référentiels équivalents soit la même : si $x = y = z = 0$ à $t = 0$, alors $x' = y' = z' = 0$ à $t' = 0$. La transformation devient,

$$\begin{cases} x' = F(t, x, y, z; a_i) \quad i = 1, \ldots, n \\ y' = G(t, x, y, z; a_i) \\ z' = H(t, x, y, z; a_i) \\ t' = J(t, x, y, z; a_i) \end{cases} \quad \text{avec les conditions} \quad \begin{cases} 0 = F(0, 0, 0, 0; a_i) \\ 0 = G(0, 0, 0, 0; a_i) \\ 0 = H(0, 0, 0, 0; a_i) \\ 0 = J(0, 0, 0, 0; a_i) \end{cases} \tag{2.18}$$

2.2.2 Homogénéité de l'espace et du temps

Dans ce qui suit, nous noterons $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ les coordonnées de l'intervalle spatio-temporel entre le point évènement (x, y, z, t) et l'origine spatio-temporelle commune aux deux référentiels équivalents. La transformation inertielle d'un intervalle infinitésimal de coordonnées (dx, dy, dz, dt) s'écrit :

$$\begin{cases} dx' = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy + \dfrac{\partial F}{\partial z} dz + \dfrac{\partial F}{\partial t} dt \\ dy' = \dfrac{\partial G}{\partial x} dx + \dfrac{\partial G}{\partial y} dy + \dfrac{\partial G}{\partial z} dz + \dfrac{\partial G}{\partial t} dt \\ dz' = \dfrac{\partial H}{\partial x} dx + \dfrac{\partial H}{\partial y} dy + \dfrac{\partial H}{\partial z} dz + \dfrac{\partial H}{\partial t} dt \\ dt' = \dfrac{\partial J}{\partial x} dx + \dfrac{\partial J}{\partial y} dy + \dfrac{\partial J}{\partial z} dz + \dfrac{\partial J}{\partial t} dt \end{cases}$$

Si l'espace est supposé homogène, la transformation inertielle ne dépend pas de l'endroit où se trouve l'intervalle transformé, et les coefficients devant dx, dy, dz et dt ne sont pas fonction de x, y et z. De même, si le temps est supposé homogène, la transformation inertielle ne dépend pas de l'époque à laquelle l'intervalle est transformé, et les coefficients devant dx, dy, dz et dt ne sont pas fonction de t. Par exemple :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = K_1(a_i)$$

Nous avons alors,

$$\begin{cases} x' = (x + \xi_1)K_1(a_i) + (y + \xi_2)K_2(a_i) + (z + \xi_3)K_3(a_i) + (t + \tau)K_4(a_i) \\ y' = (x + \xi_1)L_1(a_i) + (y + \xi_2)L_2(a_i) + (z + \xi_3)L_3(a_i) + (t + \tau)L_4(a_i) \\ z' = (x + \xi_1)M_1(a_i) + (y + \xi_2)M_2(a_i) + (z + \xi_3)M_3(a_i) + (t + \tau)M_4(a_i) \\ t' = (x + \xi_1)N_1(a_i) + (y + \xi_2)N_2(a_i) + (z + \xi_3)N_3(a_i) + (t + \tau)N_4(a_i) \end{cases}$$

qui avec les conditions (2.18) p. 28 devient :

$$\begin{cases} x' = K_1x + K_2y + K_3z + K_4t \\ y' = L_1x + L_2y + L_3z + L_4t \\ z' = M_1x + M_2y + M_3z + M_4t \\ t' = N_1x + N_2y + N_3z + N_4t \end{cases}$$

Les hypothèses les plus simples sur l'espace et le temps, espace homogène et temps homogène, impliquent une transformation affine, autrement dit la plus simple. Les conditions (2.18) p. 28 sur l'évènement origine la rendent linéaire.

2.2.3 Relativité du mouvement

On suppose que les axes x et x' sont confondus, que les axes y et y' sont parallèles ainsi que les axes z et z' et que le déplacement du référentiel $\mathcal{R}'$ a lieu selon les x croissants. Imaginons deux règles identiques placées à l'origine des référentiels, parallèles entre elles et perpendiculaires au mouvement relatif. À l'instant où elles se croisent, par symétrie elles doivent avoir même hauteur, ce qui implique $y = y'$ et $z = z'$. On ne s'intéresse plus qu'aux coordonnées x et x' et au temps :

$$\begin{cases} x' = K_1(a_i)x + K_2(a_i)y + K_3(a_i)z + K_4(a_i)t \\ t' = N_1(a_i)x + N_2(a_i)y + N_3(a_i)z + N_4(a_i)t \end{cases} \tag{2.19}$$

2.2.4 Causalité

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels équivalents d'origine spatio-temporelle commune $O(x = 0, t = 0\ ;\ x' = 0, t' = 0)$. Soit E un évènement de $\mathcal{R}$ précédant O, et soit E' un évènement de $\mathcal{R}'$ succédant O.

a) Si l'on suppose $n \geqslant 2$, il serait toujours possible de relier les deux évènements E et E' par le système d'équations (2.19), E et E' seraient alors le même évènement vu de $\mathcal{R}$ et vu de $\mathcal{R}'$. La causalité serait inversée car cet évènement précéderait l'évènement origine dans $\mathcal{R}$ et lui succéderait dans $\mathcal{R}'$. Or si E est la cause de O, cette cause doit précéder l'effet dans tous les référentiels. Par conséquent, $n < 2$.

b) Pour $n = 0$ nous avons :

$$\begin{cases} x' = x \\ t' = t \end{cases}$$

et le principe de relativité se réduit aux translations d'espace et de temps.

c) On en conclue que $n = 1$ et la transformation inertielle s'écrit :

$$\begin{cases} x' = K_1(a)x + K_2(a)y + K_3(a)z + K_4(a)t \\ t' = N_1(a)x + N_2(a)y + N_3(a)z + N_4(a)t \end{cases} \tag{2.20}$$

2.2.5 Invariance par réflexion

L'espace étant supposé isotrope, l'orientation des axes des référentiels est arbitraire. La transformation de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ doit avoir la même forme que celle de $-\mathcal{R}$ d'axe $-x$ à $-\mathcal{R}'$ d'axe $-x'$, elle doit être invariante par réflexion dans un miroir plan (yOz). Les coordonnées (x, y, z, t) et (x', y', z', t') d'un évènement peuvent être remplacées respectivement par $(-x, y, z, t)$ et $(-x', y', z', t')$ avec b comme nouveau paramètre de transformation :

$$\begin{cases} -x' = -K_1(b)x + K_2(b)y + K_3(b)z + K_4(b)t \\ t' = -N_1(b)x + N_2(b)y + N_3(b)z + N_4(b)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = K_1(b)x - K_2(b)y - K_3(b)z - K_4(b)t \\ t' = -N_1(b)x + N_2(b)y + N_3(b)z + N_4(b)t \end{cases} \tag{2.21}$$

En comparant avec (2.20) :

$$\begin{cases} K_1(a) = K_1(b) \\ K_2(a) = -K_2(b) \\ K_3(a) = -K_3(b) \\ K_4(a) = -K_4(b) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_1(a) = -N_1(b) \\ N_2(a) = N_2(b) \\ N_3(a) = N_3(b) \\ N_4(a) = N_4(b) \end{cases} \tag{2.22}$$

2.2.6 Mouvement inertiel

Nous avons vu que par isotropie de l'espace ou du temps nous pouvions utiliser indifféremment la transformation (2.20) ou (2.21). Pour des raisons pratiques nous utiliserons la seconde. Appelons *mouvement inertiel* le mouvement d'un objet au repos dans l'un des référentiels équivalents, par exemple dans $\mathcal{R}'$, tel que $x' = C_1^{ste}$, $y' = C_2^{ste}$, $z' = C_3^{ste}$. Dans $\mathcal{R}$ l'équation de son mouvement s'écrit :

$$K_1(a)x + K_2(a)y + K_3(a)z - K_4(a)t = C_1^{ste}$$
$$x = \frac{C_1^{ste} - K_2(a)y - K_3(a)z + K_4(a)t}{K_1(a)}$$

Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est aussi la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{K_4(a)}{K_1(a)} \end{aligned}$$

V ne peut être que le rapport de deux fonctions de V, donc $a = \mathrm{V}$ et :

$$K_4(\mathrm{V}) = -\mathrm{V}K_1(\mathrm{V})$$

Le paramètre a (devenu V) n'étant pas fonction du temps, les mouvements inertiels sont des mouvements à vitesse uniforme. Soit U la vitesse relative des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ exprimée en coordonnées galiléennes $(-x, y, z, t)$ et $(-x', y', z', t')$, la relation (2.22) donne :

$$\begin{cases} K_1(a) = K_1(b) \\ K_4(a) = -K_4(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1(\mathrm{V}) = K_1(\mathrm{U}) \\ -\mathrm{V}K_1(\mathrm{V}) = -[-\mathrm{U}K_1(\mathrm{U})] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1(\mathrm{V}) = K_1(\mathrm{U}) \\ -\mathrm{V}K_1(\mathrm{V}) = \mathrm{U}K_1(\mathrm{U}) \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\mathrm{U} = -\mathrm{V}$$

La vitesse relative des référentiels « inversés » est l'opposée de la vitesse relative des référentiels initiaux. (2.22) devient :

$$\begin{cases} K_1(\mathrm{V}) = K_1(-\mathrm{V}) \\ K_2(\mathrm{V}) = -K_2(-\mathrm{V}) \\ K_3(\mathrm{V}) = -K_3(-\mathrm{V}) \\ K_4(\mathrm{V}) = -K_4(-\mathrm{V}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_1(\mathrm{V}) = -N_1(-\mathrm{V}) \\ N_2(\mathrm{V}) = N_2(-\mathrm{V}) \\ N_3(\mathrm{V}) = N_3(-\mathrm{V}) \\ N_4(\mathrm{V}) = N_4(-\mathrm{V}) \end{cases} \tag{2.23}$$

Ces relations expriment les propriétés de parité des fonctions recherchées.

2.2.7 Isotropie de l'espace

Nous utilisons de nouveau l'isotropie de l'espace. Effectuons une rotation de $\pi/2$ du référentiel $\mathcal{R}$ autour de son axe (Ox) confondu avec $(O'x')$:

$$\begin{cases} x'_{\pi/2} = K_1 x_{\pi/2} + K_2 y_{\pi/2} + K_3 z_{\pi/2} + K_4 t_{\pi/2} \\ t'_{\pi/2} = N_1 x_{\pi/2} + N_2 y_{\pi/2} + N_3 z_{\pi/2} + N_4 t_{\pi/2} \end{cases}$$

Dans $\mathcal{R}$ nous avons

$$x_{\pi/2} = x, \qquad y_{\pi/2} = z, \qquad z_{\pi/2} = -y, \qquad t_{\pi/2} = t$$

et dans $\mathcal{R}'$ nous avons

$$x'_{\pi/2} = x', \qquad y'_{\pi/2} = y', \qquad z'_{\pi/2} = z', \qquad t'_{\pi/2} = t'$$

si bien que :

$$\begin{cases} K_1 x + K_2 y + K_3 z + K_4 t = K_1 x + K_2 z - K_3 y + K_4 t \\ N_1 x + N_2 y + N_3 z + N_4 t = N_1 x + N_2 z - N_3 y + N_4 t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} K_2 y + K_3 z = K_2 z - K_3 y \\ N_2 y + N_3 z = N_2 z - N_3 y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} K_3(z+y) = K_2(z-y) \\ N_3(z+y) = N_2(z-y) \end{cases}$$

Ces relations étant valables pour tout évènement, donc quels que soient y et z, on a :

$$K_2 = K_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad N_2 = N_3 = 0$$

La transformation inertielle devient :

$$\begin{cases} x' = K_1\,(x - \mathrm{V}t) \\ t' = N_1 x + N_4 t \end{cases}$$

Remplaçons trois fonctions inconnues par trois autres fonctions inconnues :

$$\begin{cases} K_1(\mathrm{V}) = \gamma(\mathrm{V}) \\ N_1(\mathrm{V}) = -\gamma(\mathrm{V})\mu(\mathrm{V}) \\ N_4(\mathrm{V}) = \gamma(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{V}) \end{cases}$$

(2.23) p. 30 devient :

$$\begin{cases} \gamma(\mathrm{V}) = \gamma(-\mathrm{V}) & (2.24\text{a}) \\ \mu(\mathrm{V}) = -\mu(-\mathrm{V}) & (2.24\text{b}) \\ \lambda(\mathrm{V}) = \lambda(-\mathrm{V}) & (2.24\text{c}) \end{cases}$$

$\mu(0) = -\mu(0)$ donc :

$$\mu(0) = 0$$

La transformation (2.20) s'écrit,

$$\begin{cases} x' = \gamma(\mathrm{V})x - \mathrm{V}\gamma(\mathrm{V})t \\ t' = \gamma(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{V})t - \gamma(\mathrm{V})\mu(\mathrm{V})x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x' = \gamma(\mathrm{V})[x - \mathrm{V}t] \\ t' = \gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{V})t - \mu(\mathrm{V})x] \end{cases}$$

2.2.8 Loi de composition interne

Effectuons deux transformations successives, de paramètres U et V :

$$\begin{cases} x' = \gamma(\mathrm{V})[x - \mathrm{V}t] & (2.25a) \\ t' = \gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{V})t - \mu(\mathrm{V})x] & (2.25b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{U})[x' - \mathrm{U}t'] \\ t'' = \gamma(\mathrm{U})[\lambda(\mathrm{U})t' - \mu(\mathrm{U})x'] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{U})\{\gamma(\mathrm{V})[x - \mathrm{V}t] - \mathrm{U}\gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{V})t - \mu(\mathrm{V})x]\} \\ t'' = \gamma(\mathrm{U})\{\lambda(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{V})t - \mu(\mathrm{V})x] - \mu(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[x - \mathrm{V}t]\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[x - \mathrm{V}t - \mathrm{U}\lambda(\mathrm{V})t + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})x] \\ t'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{U})\lambda(\mathrm{V})t - \lambda(\mathrm{U})\mu(\mathrm{V})x - \mu(\mathrm{U})x + \mu(\mathrm{U})\mathrm{V}t] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})\{[1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})]x - [\mathrm{V} + \mathrm{U}\lambda(\mathrm{V})]t\} \\ t'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})\{[\lambda(\mathrm{U})\lambda(\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})]t - [\lambda(\mathrm{U})\mu(\mathrm{V}) + \mu(\mathrm{U})]x\} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})]\left[x - \dfrac{\mathrm{V} + \mathrm{U}\lambda(\mathrm{V})}{1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})}t\right] & (2.26a) \\ t'' = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{U})\lambda(\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})]\left[t - \dfrac{\lambda(\mathrm{U})\mu(\mathrm{V}) + \mu(\mathrm{U})}{\lambda(\mathrm{U})\lambda(\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})}x\right] & (2.26b) \end{cases}$$

On postule que la composée de deux transformations doit être une transformation de paramètre W à définir. Cela traduit la transitivité de la relation d'équivalence entre référentiels (3) p. 2 :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(\mathrm{W})(x - \mathrm{W}t) \\ t'' = \gamma(\mathrm{W})[\lambda(\mathrm{W})t - \mu(\mathrm{W})x] \end{cases}$$

Nous avons alors les conditions suivantes :

$$\begin{cases} w = \dfrac{\mathrm{V} + \mathrm{U}\lambda(\mathrm{V})}{1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})} & (2.27a) \\ \gamma(w) = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})] & (2.27b) \\ \gamma(w)\lambda(w) = \gamma(\mathrm{U})\gamma(\mathrm{V})[\lambda(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{U}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})] & (2.27c) \\ \dfrac{\mu(\mathrm{W})}{\lambda(\mathrm{W})} = \dfrac{\lambda(\mathrm{U})\mu(\mathrm{V}) + \mu(\mathrm{U})}{\lambda(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{U}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})} & (2.27d) \end{cases}$$

On réécrit l'équation (2.27c) en remplaçant $\gamma(\mathrm{W})$ par son expression en (2.27b) :

$$\lambda(\mathrm{W}) = \frac{\gamma(\mathrm{V})\gamma(\mathrm{U})[\lambda(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{U}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})]}{\gamma(\mathrm{V})\gamma(\mathrm{U})[1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})]}$$

En remplaçant W par sa valeur donnée par l'équation (2.27a) :

$$\lambda\left[\frac{\mathrm{V} + \mathrm{U}\lambda(\mathrm{V})}{1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})}\right] = \frac{\lambda(\mathrm{V})\lambda(\mathrm{U}) + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})}{1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})} \tag{2.28}$$

Cette relation est valable $\forall \mathrm{U}$ donc pour $\mathrm{U} = 0$:

$$\lambda(\mathrm{V}) = \lambda(\mathrm{V})\lambda(0)$$
$$\lambda(\mathrm{V})[1 - \lambda(0)] = 0$$

Cette relation est valable $\forall \mathrm{V}$ donc pour $\mathrm{V} = 0$. Nous avons alors :

$$\lambda(0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda(0) = 1$$

Le premier cas donne $\lambda(\mathrm{V}) = 0$. Mais alors (2.25b) donne t' fonction uniquement de x, ce qui est exclu puisque l'on cherche une transformation à deux paramètres. Il reste donc :

$$\lambda(0) = 1$$

Posons maintenant $\mathrm{U} = -\mathrm{V}$ dans (2.28) :

$$\lambda\left[\frac{\mathrm{V} - \mathrm{V}\lambda(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\right] = \frac{\lambda(\mathrm{V})\lambda(-\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(-\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}$$

En se servant des propriétés de parité (2.24c) et (2.24b) :

$$\lambda\left\{\frac{\mathrm{V}[1 - \lambda(\mathrm{V})]}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\right\} = \frac{\lambda^2(\mathrm{V}) - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}$$

Introduisons une nouvelle fonction $F(\mathrm{V}) = 1 - \lambda(\mathrm{V})$. Cette fonction est paire car $F(-\mathrm{V}) = 1 - \lambda(-\mathrm{V}) = 1 - \lambda(\mathrm{V}) = F(\mathrm{V})$, et est telle que $F(0) = 1 - \lambda(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
\lambda\left[\frac{\mathrm{V}F(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\right] &= \frac{[1 - F(\mathrm{V})]^2 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})} \\
1 - F\left[\frac{\mathrm{V}F(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\right] &= \frac{1 + F^2(\mathrm{V}) - 2F(\mathrm{V}) - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})} \\
F\left[\frac{\mathrm{V}F(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\right] &= 1 - \frac{1 + F^2(\mathrm{V}) - 2F(\mathrm{V}) - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})} \\
&= \frac{F^2(\mathrm{V}) - 2F(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})} \\
&= 2F(\mathrm{V})\,\frac{F(\mathrm{V})/2 - 1}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}
\end{aligned}$$

Par continuité de μ en zéro et avec $\mu(0) = 0$, quand V tend vers zéro, μ tend également vers zéro, et $1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})$ tend vers 1. De même, par continuité de F en zéro et avec $F(0) = 0$, quand v tend vers zéro, F tend vers zéro, et $F(\mathrm{V})/2 - 1$ tend vers -1. Donc, lorsque V tend vers zéro, le problème revient à résoudre :

$$F\left[\mathrm{V}F(\mathrm{V})\right] = -2F(\mathrm{V}) \tag{2.29}$$

L'équation de continuité de F en zéro s'écrit :

$$\forall\varepsilon,\ \exists\eta\ /\ |\mathrm{V}| < \eta\ \Rightarrow\ |F(\mathrm{V})| < \varepsilon$$

On part avec $\mathrm{V}_0 < \eta$ et $|F(\mathrm{V}_0)| < \varepsilon \ll 1$. On pose $F_0 = F(\mathrm{V}_0)$. Avec (2.29) :

$$\begin{aligned}
F\left[\mathrm{V}_0 F(\mathrm{V}_0)\right] &= -2F(\mathrm{V}_0) \\
F\left(\mathrm{V}_0 F_0\right) &= -2F_0
\end{aligned}$$

On pose $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_0 F_0$, donc $\mathrm{V}_1 < \mathrm{V}_0$ et l'on se rapproche de zéro. On a donc :

$$F\left(\mathrm{V}_1\right) = -2F_0$$

Avec (2.29) :

$$F\left[\mathrm{V}_1 F(\mathrm{V}_1)\right] = -2F(\mathrm{V}_1) = 2^2 F_0$$

On pose $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_1 F(\mathrm{V}_1)$, donc $\mathrm{V}_2 < \mathrm{V}_1$ et :

$$F\left(\mathrm{V}_2\right) = 2^2 F_0$$

Après p itérations on a :

$$F\left(\mathrm{V}_p\right) = (-2)^p F_0$$

$|F(\mathrm{V}_p)|$ diverge et devient supérieur à ε. La fonction F ne peut donc pas tendre de façon continue vers 0. Elle est par conséquent constante autour de zéro, donc $\forall \mathrm{V}$, et comme $F(0) = 0$ on a $F(\mathrm{V}) = 0$. Par conséquent :

$$\lambda(\mathrm{V}) = 1$$

(2.28) devient,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U})}{1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V})} \\ 1 + \mathrm{U}\mu(\mathrm{V}) &= 1 + \mathrm{V}\mu(\mathrm{U}) \\ \frac{\mu(\mathrm{V})}{\mathrm{V}} &= \frac{\mu(\mathrm{U})}{\mathrm{U}} \\ &= C^{ste} \end{aligned}$$

soit,

$$\mu(\mathrm{V}) = \kappa \mathrm{V}$$

où κ est une constante. À partir de (2.27a),

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{V} + \mathrm{U}}{1 + \kappa \mathrm{VU}}$$

qui est la loi de composition des vitesses. À partir de (2.27b) :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathrm{W}) &= \gamma(\mathrm{V})\gamma(\mathrm{U})[1 + \kappa \mathrm{VU}] \\ \gamma\left(\frac{\mathrm{V} + \mathrm{U}}{1 + \kappa \mathrm{VU}}\right) &= \gamma(\mathrm{V})\gamma(\mathrm{U})[1 + \kappa \mathrm{VU}] \end{aligned}$$

Pour $\mathrm{U} = -\mathrm{V}$, et avec la relation de parité (2.24a),

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma(\mathrm{V})\gamma(-\mathrm{V})[1 - \kappa \mathrm{V}^2] \\ &= \gamma^2(\mathrm{V})[1 - \kappa \mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

et si $\mathrm{V} = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma^2(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(si $\gamma(0) = 0$ les relations (2.25a) et (2.25b) sont nulles).

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma^2(\mathrm{V})[1 - \kappa \mathrm{V}^2] \\ \gamma(\mathrm{V}) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa \mathrm{V}^2}} \end{aligned} \tag{2.30}$$

On conserve le signe positif seul car $\gamma(0) = +1$. La transformation (2.25) p. 32 s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \mathrm{V}t}{\sqrt{1 - \kappa \mathrm{V}^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \kappa \mathrm{V}x}{\sqrt{1 - \kappa \mathrm{V}^2}} \end{cases}$$

Remarque 2.2.1. *L'existence de l'élément neutre est démontrée (et non postulée), puisque pour* $\mathrm{V} = 0$ *on a la transformation identité :*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Remarque 2.2.2. *L'existence d'une transformation inverse peut être démontrée (et non postulée). En effet, pour* $\mathrm{U} = -\mathrm{V}$, (2.26a) *et* (2.26b) *deviennent :*

$$\begin{cases} x'' = \gamma(-\mathrm{V})\gamma(\mathrm{V})[1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})] \left[x - \dfrac{\mathrm{V} - \mathrm{V}\lambda(\mathrm{V})}{1 - \mathrm{V}\mu(\mathrm{V})}\, t\right] \\ t'' = \gamma(-\mathrm{V})\gamma(\mathrm{V})[\lambda(-\mathrm{V})\lambda(\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(-\mathrm{V})] \left[t - \dfrac{\lambda(-\mathrm{V})\mu(\mathrm{V}) + \mu(-\mathrm{V})}{\lambda(-\mathrm{V})\lambda(\mathrm{V}) + \mathrm{V}\mu(-\mathrm{V})}\, x\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1 - \kappa\mathrm{V}^2}{1 - \kappa\mathrm{V}^2} \left(x - \dfrac{\mathrm{V} - \mathrm{V}}{1 - \kappa\mathrm{V}^2}\, t\right) \\ t'' = \dfrac{1 - \kappa\mathrm{V}^2}{1 - \kappa\mathrm{V}^2} \left(t - \dfrac{\kappa\mathrm{V} - \kappa\mathrm{V}}{1 - \kappa\mathrm{V}^2}\, x\right) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x'' = x \\ t'' = t \end{cases}$$

Remarque 2.2.3. *On peut vérifier l'associativité des transformations, qui par conséquent forment un groupe.*

2.2.9 Transformation de Lorentz-Poincaré

a) Pour $\kappa < 0$ on pose $\kappa = -c^{-2}$ avec c homogène à une vitesse. La loi de composition des vitesses devient :

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{V} + \mathrm{U}}{1 - \frac{\mathrm{VU}}{c^2}}$$

Si $\mathrm{V} = \mathrm{U} = c$ alors $\mathrm{W} = +\infty$, et la composition de deux vitesses finies donne une vitesse infinie.

b) Pour $\kappa = 0$ on retrouve la transformation de Galilée (1.3) p. 7 :

$$\begin{cases} x' = x - \mathrm{V}t \\ t' = t \end{cases}$$

c) Pour $\kappa > 0$ on pose $\kappa = c^{-2}$ avec c homogène à une vitesse. La loi de composition des vitesses devient :

$$w = \frac{\mathrm{V} + \mathrm{U}}{1 + \frac{\mathrm{VU}}{c^2}} \tag{2.31}$$

Si $\mathrm{V} = \mathrm{U} = c$ alors $\mathrm{W} = c$, et c est donc une vitesse limite. $\gamma(\mathrm{V})$ défini par la relation (2.30) p. 34, devient tel que :

$$\gamma \geqslant 1$$

La transformation (2.25) p. 32 s'écrit,

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - \mathrm{V}t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \mathrm{V}x/c^2\right) \end{cases}$$

appelée *transformation spéciale de Lorentz*. On retrouve la transformation de Galilée lorsque $c = \infty$, ou, ce qui est équivalent, lorsque $\mathrm{V} \ll c$.

REMARQUE 2.2.4. *Les transformations de Lorentz forment un groupe, mais comme nous l'avons vu l'exigence d'une loi de groupe n'est pas nécessaire pour les établir. Nous avons utilisé la linéarité des transformations, l'invariance par réflexion spatiale et l'hypothèse de l'existence d'une loi de composition interne. La linéarité n'est en fait pas une contrainte pour la recherche des transformations car elle correspond au choix le plus simple, celui que l'on fait a priori, avant que de chercher des transformations non linéaires. Les deux autres hypothèses sont la traduction directe du principe de relativité appliqué à la loi de transformation des coordonnées elle-même. La composée de deux transformations de coordonnées ainsi que la transformation des coordonnées d'un référentiel inversé doivent avoir la même forme qu'une transformation de coordonnée seule.*

2.2.10 Référentiels galiléens

Retour sur les propriétés des référentiels équivalents évoqués au paragraphe 2.2.1 p 27. Le passage d'un référentiel équivalent à un autre se fait par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cherchons le mouvement de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$, autrement dit le mouvement du centre $O(x = 0)$ en fonction de x' et t',

$$\begin{cases} x' = -\gamma \mathrm{V}t \\ t' = \gamma t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x' = -\mathrm{V}t'$$

C'est un mouvement de translation rectiligne ($y' = y$ et $z' = z$) uniforme (V est constante). Les référentiels équivalents sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, ce sont des référentiels galiléens.

3

Durée propre, longueur propre

3.1 Durée propre

Définition 3.1.1. *Temps propre*
Une horloge fixe dans un référentiel mesure le temps propre de ce référentiel.

Par exemple, le temps propre à bord d'un avion est indiqué par une horloge embarquée. À chaque observateur ou référentiel son temps propre. La notion de temps n'a que peu d'intérêt car on ne mesure jamais que des durées.

Définition 3.1.2. *Durée propre*
La durée séparant deux évènements qui ont lieu au même endroit dans un référentiel est appelée durée propre ou intervalle de temps propre.

Le temps propre est habituellement noté τ ou t_0. Une durée propre est toujours lue sur une seule et même horloge.

Définition 3.1.3. *Durée impropre*
La durée séparant deux évènements qui ont lieu en deux endroits distincts dans un référentiel est appelée durée impropre ou intervalle de temps impropre.

Le temps impropre est la différence d'indication de deux horloges préalablement synchronisées, une horloge située en chaque évènement. La durée impropre dépend d'un choix arbitraire de référentiel (de sa vitesse), elle a donc le même arbitraire. Le temps impropre n'est qu'une coordonnée, au même titre que les coordonnées spatiales qui sont elles aussi arbitraires, on l'appelle *temps coordonnée.*

Dans la suite de ce document nous noterons $\mathcal{R}$ le référentiel de l'observatrice Anna et t son temps propre, $\mathcal{R}'$ le référentiel de l'observateur Robert, alias Bob, et t' son temps propre. Nous supposerons qu'ils ont chacun une montre au poignet et plusieurs horloges synchronisées placées en différents endroits de leur référentiel. Nous préciserons s'ils sont galiléens ou non.

Supposons que Bob et Anna soient galiléens, et que Bob observe les indications de la montre d'Anna qui se déplace dans son référentiel. L'affichage midi et l'affichage 13h sur la montre d'Anna sont deux évènements qui ont lieu au même endroit dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna, la durée Δt les séparant lue par Anna est une durée propre, on la note $\Delta\tau$. En revanche ces évènements ont lieu en deux endroits distincts dans le référentiel de Bob, deux endroits où Bob a placé des horloges.

Différentions la transformation de Lorentz (2.15) p. 25 ($c = 1$) entre les observateurs galiléens Anna et Bob s'écrit :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e dt - \gamma_e v_e dx & (3.1a) \\ dx' = \gamma_e dx - \gamma_e v_e dt & (3.1b) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} dt = \gamma_e dt' + \gamma_e v_e dx' \\ dx = \gamma_e dx' + \gamma_e v_e ct' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

Elle permet de calculer la durée $\Delta t'$ que doit mesurer Bob par soustraction de l'indication de deux de ses horloges situées sur le trajet d'Anna. Dans le référentiel d'Anna sa montre ne bouge pas, à chaque instant $dr = 0$:

$$dx = dy = dz = 0$$

t devient le temps propre et avec (3.1a) p. 38 :

$$dt' = \gamma_e d\tau \tag{3.3}$$

En intégrant :

$$\boxed{\Delta t' = \int_{midi}^{13\text{h}} \gamma_e d\tau}$$

D'après la relation (2.13) p. 24, $\gamma_e \geqslant 1$, la *durée impropre* $\Delta t'$ mesuré par Bob entre les deux évènements est plus longue que la durée propre (une heure) affichée par la montre d'Anna. Bob mesure par exemple une durée d'une heure et dix minutes (si Anna est pressée). L'intervalle de temps propre d'un objet mobile est toujours inférieur à l'intervalle de temps impropre mesuré dans le référentiel dans lequel l'objet est mobile.

Réciproquement, si l'on connait la durée mesurée par Bob on peut en déduire celle lue par Anna :

$$dt = dt'/\gamma_e$$
$$\Delta\tau = \int_{midi}^{13\text{h}10\text{m}} \frac{1}{\gamma_e} dt'$$

Remarque 3.1.1. *La relation* (3.1b) *donne :*

$$\begin{aligned} dx' &= -\gamma_e v_e dt \\ &= -v_e dt' \\ dx'/dt' &= -v_e \end{aligned}$$

On retrouve le fait que v_e est la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, et $-v_e$ celle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ (notation 1.2.1 p. 6).

On vérifie la cohérence de la transformation de Lorentz. Supposons que les deux évènements aient lieu au même endroit dans le référentiel de Bob, dans ce cas Bob lit un temps propre sur sa montre. Injectons $dx' = 0$ dans (3.1a) et (3.1b) p. 38 :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e dt - \gamma_e v_e dx \\ dx = v_e dt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dt' = \gamma_e \left(1 - v_e^2\right) dt \quad \Rightarrow \quad dt = \gamma_e d\tau$$

Enfin, sans passer par la transformation de Lorentz, nous obtenons les mêmes résultats en nous servant de l'invariance de l'intervalle d'univers (2.4) p. 16 et de sa définition 2.1.1 p. 16 :

$$c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt'^2 - dr'^2$$

En posant $dr = 0$, le temps t devient le temps propre :

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt'^2 \left(1 - \beta_e^2\right) \\ dt' &= \gamma_e d\tau \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2. *Le temps de la mécanique non relativiste n'est ni le temps propre ni le temps impropre, c'est leur ancètre commun mais ce n'est ni l'un ni l'autre. Ce modèle de la réalité n'est valable qu'à faible vitesse devant c. Chaque notion de mécanique non relativiste faisant intervenir le temps (la vitesse, l'accélération, l'impulsion, la force), fait émerger deux notions en mécanique relativiste, l'une avec le temps propre, l'autre avec le temps impropre.*

Reprenons la définition 2.1.1 p. 16 en convention de genre temps :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Lorsque dx, dy, dz sont nuls, elle donne :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2d\tau^2 \qquad (3.4) \\ ds &= \pm c d\tau \end{aligned}$$

On suppose que l'intervalle est pris dans le sens de l'écoulement du temps :

$$ds = cd\tau \qquad (3.5)$$

Le carré de l'intervalle d'espace-temps est positif, l'intervalle est réel et est égal au temps propre au facteur c près. En convention de genre espace on conserve le signe négatif :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2d\tau^2 \\ ds &= icd\tau \end{aligned}$$

Le carré de l'intervalle d'espace-temps est négatif, l'intervalle est imaginaire. Dans l'espace de Poincaré-Minkowski, pour un objet matériel se déplaçant à vitesse v inférieure à c, le carré de l'intervalle d'univers s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \pm \left(c^2dt^2 - v^2dt^2\right) \\ &= \pm \left(c^2 - v^2\right) dt^2 \end{aligned}$$

$c > v$ donc en convention de genre temps ds^2 est positif et ds est réel, alors qu'en convention de genre espace ds^2 est négatif et ds est imaginaire.

Le temps propre n'est pas invariant par changement de référentiel puisqu'il n'est défini que dans le référentiel dans lequel les deux évènements ont lieu au même endroit, mais il a un caractère *absolu*. Évidemment, tous les observateurs s'accordent sur le temps que mesure Anna entre deux évènements ayant lieu au même endroit pour elle, mais pas sur le temps que eux-mêmes mesurent entre ces deux mêmes évènements.

Supposons à présent que Bob quitte Anna puis revienne voir Anna. Bob n'est plus dans un référentiel galiléen. Entre les évènements A départ de Bob et B retour de Bob, l'horloge mobile de Bob retarde sur l'horloge fixe d'Anna. À partir de la relation (3.5), le temps écoulé indiqué par une horloge est l'intégrale de la ligne d'univers de cette horloge au facteur c près :

$$\Delta t = \frac{1}{c}\int_A^B ds \tag{3.6}$$

Or ce temps est maximal pour une horloge fixe, celle d'Anna, dont la ligne d'univers est une droite parallèle à l'axe du temps. On en conclue que la quadridistance entre deux évènements est maximale le long d'une ligne d'univers droite. Ceci est lié au caractère pseudo-euclidien de l'espace-temps hyperbolique de la relativité restreinte. Dans un espace euclidien la distance est minimale le long d'une ligne droite.

3.2 Longueur propre

Nous parlerons de longueur pour un objet et de distance pour un trajet. Appelons « particule d'épreuve » un objet élémentaire (sans charge électrique et sans moment cinétique), de dimensions et de masse négligeables par rapport aux autres dimensions et masses dont il est question. Un référentiel dans lequel un objet, un observateur ou une particule d'épreuve est immobile est appelé *référentiel propre* de cet objet, de cet observateur ou de cette particule d'épreuve. La *longueur propre* d'un objet physique est la longueur de cet objet lorsqu'il est immobile, c'est-à-dire mesurée dans le référentiel propre de cet objet.

a) Si l'objet est immobile dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob alors $\Delta x'$ est sa longueur propre. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ de Anna nous devons avoir $\Delta t = 0$, c'est-à-dire $t_1 = t_2$. Les horloges devant lesquelles passent l'avant et l'arrière de l'objet doivent indiquer le même temps.

La transformation de Lorentz-Poincaré (2.15) p. 25 ($c = 1$) s'écrit avec $\Delta t = 0$:

$$\begin{cases} \Delta t' = -\gamma_e v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e \Delta x \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta x = \Delta x'/\gamma_e}$$

Comme $\gamma_e > 1$, la *longueur impropre* mesurée par Anna est plus courte que la longueur propre mesurée par Bob.

b) Si l'objet est immobile dans $\mathcal{R}$ alors Δx est sa longueur propre. Dans $\mathcal{R}'$ nous devons avoir $\Delta t' = 0$:

$$\begin{cases} \Delta t = v_e \Delta x \\ \Delta x' = \gamma_e (\Delta x - v_e \Delta t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \gamma_e \left(1 - v_e^2\right) \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x' = \Delta x/\gamma_e$$

Remarque 3.2.1. *Il n'y a pas de contraction réelle des distances dans le sens du mouvement, cette contraction est observationnelle et réciproque. Si la contraction était réelle, du gaz dans un récipient serait comprimé et deviendrait liquide pour un observateur du réferentiel en mouvement relatif et pas pour un observateur du référentiel propre.*

4

Diagrammes d'espace-temps

4.1 Mécanique non relativiste

4.1.1 Diagramme spatial

En mécanique non relativiste, à un changement de référentiel galiléen correspond un changement d'origine du système de coordonnées spatiales. La coordonnée temporelle étant la même dans tous les référentiels galiléens, on ne la représente pas mais on représente deux, ou trois, des trois coordonnées spatiales à un instant donné. La figure 4.1 représente l'instant initial t_0 où les référentiels se croisent.

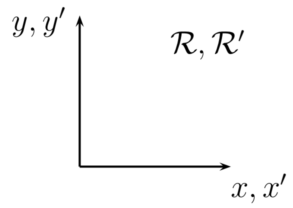

Fig. 4.1 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à l'instant initial $t_0 = t'_0$

Pour simplifier, on choisit le vecteur vitesse d'entrainement (constant) des référentiels selon les axes x et x' confondus. On représente alors habituellement les référentiels à l'instant t_1, comme sur la figure 4.2.

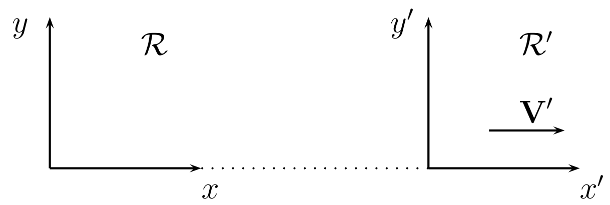

Fig. 4.2 – Représentation spatiale des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, à l'instant t_1

La trajectoire relative est repésentée en pointillés. La représentation du vecteur $\vec{v}_e$ attaché à $\mathcal{R}'$ implique que l'observateur (nous) se situe dans $\mathcal{R}$. Par convention nous sommes toujours a priori au repos dans $\mathcal{R}$. Nous sommes donc immobiles dans $\mathcal{R}$ et nous observons $\mathcal{R}'$ s'éloigner de nous à la vitesse $\vec{v}_e$. Il est tout aussi vrai de dire que $\mathcal{R}$ s'éloigne de $\mathcal{R}'$ à la vitesse $-\vec{v}_e$.

4.1.2 Diagramme spatial et temporel

Pour faire le lien avec la représentation de l'espace-temps de la relativité restreinte, représentons l'axe temporel et un (ou deux) axe spatial sur une feuille de papier. Les axes portant des quantités de nature différente, l'espace mathématique (x, t) est affine, on ne peut y définir de distance ou d'angle. Le plan (x, t) n'est pas euclidien et les axes x et t n'ont pas de raison d'être orthogonaux. Ces axes ne se croisent que parce qu'on les représente sur un même plan, celui de la feuille de papier qui est un plan euclidien. Par convention ils se croisent sur la feuille de papier au point $o(0, 0, 0, 0)$.

Pour dessiner les axes de coordonnées x' et t' dans le système de coordonnées (x, t) sur la même feuille de papier, reprenons la transformation de Galilée (1.3) p. 7 pour deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard :

$$\begin{cases} x' = x - v_e t \\ t' = t \end{cases}$$

L'axe x' est l'ensemble des évènements pour lesquels $t' = 0$. Il a pour équation dans le système de coordonnées (x, t), à la fois $t = 0$ et $x' = x$. Par conséquent les axes x' et x sont confondus.

De même que l'axe de coordonnée t est l'ensemble des évènements ayant lieu en $x = 0$, c'est-à-dire à l'origine de $\mathcal{R}$, l'axe de coordonnée t' est l'ensemble des évènements ayant lieu en $x' = 0$, c'est-à-dire à l'origine de $\mathcal{R}'$. L'axe t' a donc pour équation dans le système de coordonnées (x, t) :

$$0 = x - v_e t$$
$$t = x/v_e$$

C'est une droite passant par l'origine et de pente $1/v_e$ dans le plan (x, t). Si l'on pose $\tan \alpha = 1/v_e$ alors l'angle α est l'angle entre x' et t' mesuré dans le plan (x, t). La feuille de papier sur laquelle est tracé le diagramme affine (fig. 4.3) est un plan spatial euclidien à 2 dimensions, sur lequel les distances et les angles sont définis. Si l'on représente l'axe t perpendiculairement à l'axe x alors α est aussi l'angle mesuré sur la feuille de papier. La transformation de Galilée est alors un « cisaillement ». Plus la vitesse relative est grande et plus l'axe t' se rapproche de l'horizontale.

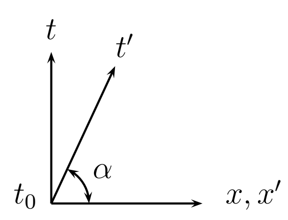

FIG. 4.3 – $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ pour un observateur au repos dans $\mathcal{R}$

Se pose la question de savoir si les coordonnées (x', t') d'un point de ce diagramme s'obtiennent par projection parallèle ou par projection orthogonale aux axes. Un évènement sur l'axe t' a pour coordonnée $x' = 0$, et un évènement sur l'axe x' a pour coordonnée temporelle $t' = 0$, par conséquent les coordonnées s'obtiennent par projection parallèle aux axes.

Sur la feuille (figure 4.4) les évènements A et B sont simultanés dans $\mathcal{R}$ et donc aussi dans $\mathcal{R}'$ puisque le temps est universel. Les évènements simultanés forment des droites de simultanéité parallèles à l'axe $x = x'$.

Les distances sur la feuille, de l'origine au point t_A et de l'origine au point t'_A représentent la même durée. Les unités temporelles sur la feuille ne sont pas identiques.

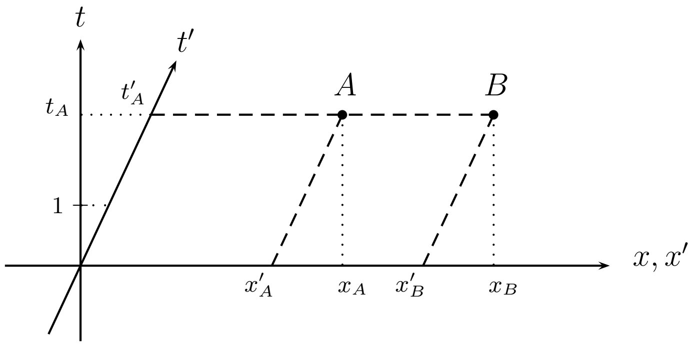

Fig. 4.4 – Coordonnées des évènements A et B dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

On remarque que

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ \frac{1}{v_e} &= \frac{t_A}{x_A - x'_A} \\ x_A - x'_A &= v_e t_A \end{aligned}$$

Les unités de distance x et x' sur la feuille de papier (figure 4.4) sont identiques.

La ligne d'univers du point A immobile dans $\mathcal{R}$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_A$, c'est-à-dire la trajectoire de A dans l'espace (x, t) entre ces instants, est représentée par le segment de droite en pointillés de x_A à A. La ligne d'univers de ce même point A dans $\mathcal{R}'$ entre les mêmes instants est représentée par le segment de droite discontinu de x'_A à A. Les lignes d'univers d'un même point ne sont pas confondus, on ne peut pas représenter sur ce diagramme différents instants.

4.2 Relativité restreinte

4.2.1 Diagramme de Minkowski

Au changement de référentiel galiléen correspond un changement de système de coordonnées (origine et coordonnées). En relativité le changement d'origine n'ayant pas ou peu d'importance, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement de coordonnées. On note ici qu'en physique non relativiste c'est le contraire, du changement de système de coordonnées on ne retient que le changement d'origine, les coordonnées restant identiques. On ne s'intéresse donc pas au déplacement des référentiels dans l'espace comme en mécanique non relativiste (fig. 4.2 p. 41), mais aux axes de coordonnées (x, ct) et (x', ct') des référentiels galiléens à l'instant $t_0 = t'_0$ où ils se croisent (fig. 4.3 p. 42).

Nous pouvons trouver les axes ct' et x' de deux façons.

a) Le centre O' de $\mathcal{R}'$ se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse β_e, sa trajectoire a pour équation $x = \beta_e ct$. Or la trajectoire de O' c'est l'axe du temps ct', qui a donc pour équation $ct = x/\beta_e$ dans le système de coordonnées (x, ct). La trajectoire d'un photon se déplaçant à la vitesse limite à pour équation $ct = x$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x, ct), représentée en pointillés sur la figure 4.5. Pour que cette vitesse soit aussi c dans le système de coordonnées (x', ct'), il faut que l'axe x' ait pour équation $ct = \beta_e x$ dans le système de coordonnées (x, ct). La trajectoire d'un photon a alors pour équation $ct' = x'$ et est une bissectrice du système de coordonnées (x', ct').

b) En nous servant de la transformation de Lorentz-Poincaré (2.14) p. 24. Sur l'axe ct' nous avons $x' = 0$ car tous les axes se croisent en un point pris pour origine $O'(0, 0, 0, 0)$:

$$0 = \gamma_e(x - \beta_e ct)$$
$$x = \beta_e ct$$

C'est l'équation de l'axe de coordonnée ct' dans le système de coordonnées (x, ct). De même, sur l'axe x' nous avons $ct' = 0$, soit,

$$0 = \gamma_e(ct - \beta_e x)$$
$$ct = \beta_e x$$

qui est l'équation de l'axe de coordonnée x' dans le système de coordonnées (x, ct). La représentation de l'espace-temps (fig.4.5) est appelée *diagramme de Minkowski.*

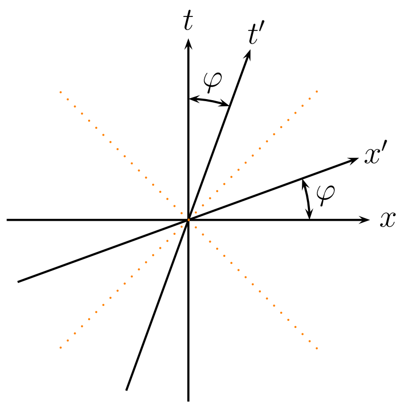

FIG. 4.5 – Diagramme de Minkowski

En posant

$$\boxed{\beta_e = \tan\varphi}$$

nous pouvons représenter l'angle φ sur la figure (4.5).

Lorsque $\beta_e = 1$ la vitesse d'entrainement est maximale et, vues du référentiel $\mathcal{R}$, les coordonnées spatiales et temporelle du référentiel $\mathcal{R}'$ se rejoignent sur la bissectrice.

Pour une vitesse d'entrainement v_e petite devant c nous devons retrouver la transformation de Galilée à partir de celle de Lorentz. Lorsque $\beta_e \ll 1$, γ_e tend vers un, on trouve bien $x' = x - \beta_e ct$ à partir de (2.14b) p. 24. Pour retrouver $t' = t$ à partir de (2.14a) p. 24 il faut aussi respecter la condition suivante sur les coordonnées de l'évènement quelconque A :

$$\beta_e x_A \ll ct_A$$

Les deux cas extrêmes pour l'évènement A par rapport à l'évènement origine sont les suivants :

— $x_A = 0$ et t_A quelconque. Dans ce cas on retrouve la transformation de Galilée.

— x_A est très grand mais l'évènement A est dans le cône de lumière de l'évènement origine, sinon il n'existerait pas pour celui-ci. Sur le cône de lumière de sommet l'origine, $x_A = ct_A$:

$$\beta_e ct_A \ll ct_A$$
$$\beta_e \ll 1$$

C'est notre hypothèse de départ, autrement dit on retrouve bien la transformation de Galilée lorsque v_e est petite devant c.

L'ensemble de tous les évènements formant un intervalle nul avec l'évènement origine O ou O' est représenté par deux droites en pointillés sur la figure 4.5, se croisant à angle droit aux origines communes O et O'. Ces droites ont un caractère absolu, elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e des référentiels, ce sont des rayons de lumière si celle-ci se déplace à la vitesse limite.

Plaçons nous dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et considérons un évènement A. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ les coordonnées de l'évènement A s'obtiennent en projetant le point A parallèlement aux axes x' et ct'. L'axe x étant la droite d'équation $ct = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}$ sont des droites parallèles à l'axe x. De même, l'axe x' étant la droite d'équation $ct' = 0$, les lignes de simultanéité dans $\mathcal{R}'$ sont des droites parallèles à l'axe x'. Les lignes de coordonnée x' constante sont parallèles à l'axe ct' (Fig. 4.6).

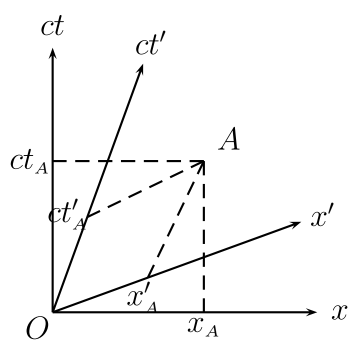

Fig. 4.6 – Coordonnées de l'évènement A

Hyper-cône de lumière

D'après le paragraphe 2.1.6 p. 15, une sphère de lumière se propageant dans l'espace correspond à un intervalle nul et a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

où t est un paramètre. En deux dimensions d'espace c'est un cercle de lumière de rayon ct et d'équation $x^2 + y^2 = (ct)^2$ dans $\mathcal{R}$. Dans $\mathcal{R}'$ on observe aussi un cercle d'équation $x'^2 + y'^2 = (ct')^2$. Dans l'espace-temps où t est une variable, ces cercles de rayon croissant forment un cône de sommet les origines communes O et O'.

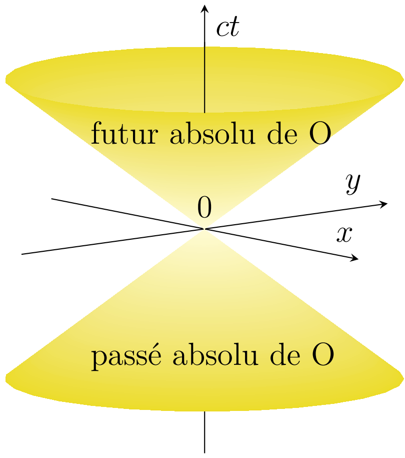

FIG. 4.7 – Hypercône de lumière invariant

Dans l'espace-temps à quatre dimensions, pour un évènement origine donné, les intervalles nuls forment un hyper-cône appelé *hyper-cône de lumière*.

Hyperboles invariantes

Au paragraphe 2.1.8 p. 16, nous avons vu que l'intervalle s entre deux évènements est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré. Cette distance spatio-temporelle est l'analogue de la distance purement spatiale de la physique non relativiste. En deux dimensions, intéressons-nous à l'ensemble des points à distance unité du point origine. Dans l'espace c'est un cercle de rayon unité $r = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dans l'espace-temps c'est l'ensemble des évènements tels que $s = 1$. Chacune des deux définitions du carré de l'intervalle donne une équation :

$$(ct)^2 - x^2 = 1$$
$$x^2 - (ct)^2 = 1$$

Chaque équation est une hyperbole à deux branches, d'asymptotes $ct = \pm x$ représentées en pointillés sur la figure 4.8. Comme vu au paragraphe précédent, ces asymptotes sont possiblement les lignes d'univers des photons. La première hyperbole est représentée en bleu, la seconde en vert.

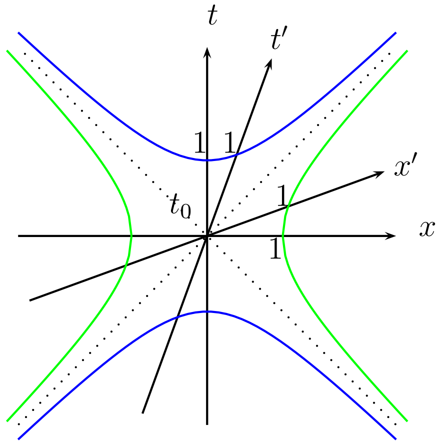

FIG. 4.8 – Hyperboles invariantes

De même dans $\mathcal{R}'$ nous avons :

$$x'^2 - (ct')^2 = \pm 1$$

REMARQUE 4.2.1. *L'hyperbole est invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré, mais les évènements formant l'hyperbole n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: ils glissent sur l'hyperbole lorsque l'on change continuement de référentiel.*

L'intervalle permet d'indiquer les unités des différents axes. Figure 4.8, sur l'hyperbole du haut

$$(ct)^2 - x^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (ct')^2 - x'^2 = 1$$

En $x = 0$ nous avons $ct = 1$, et en $x' = 0$ nous avons $ct' = 1$. Considérons un référentiel passant par l'origine $O(0,0,0,0)$, lorsque son temps propre vaudra l'unité ($\tau = 1$) ce référentiel sera quelque part sur l'hyperbole invariante $s = 1$.

Sur l'autre hyperbole

$$(ct)^2 - x^2 = -1 \qquad \text{et} \qquad (ct')^2 - x'^2 = -1$$

En $ct = 0$ nous avons $x = 1$, et en $ct' = 0$ nous avons $x' = 1$.

Ces hyperboles sont absolues car elles ne dépendent pas de la vitesse relative β_e de l'observateur. Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, en une dimension d'espace et une de temps, les points situés à une distance spatio-temporelle donnée forment deux hyperboles. Pour chaque valeur fixée de l'intervalle entre l'origine et les autres évènements, nous pouvons tracer une hyperbole invariante. Lorsque la valeur de l'intervalle tend vers zéro, l'hyperbole invariante tend vers un cône.

En deux dimensions d'espace et une de temps, les hyperboles invariantes bleues sur les figures précédentes forment un hyperboloïde à deux nappes :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 1$$

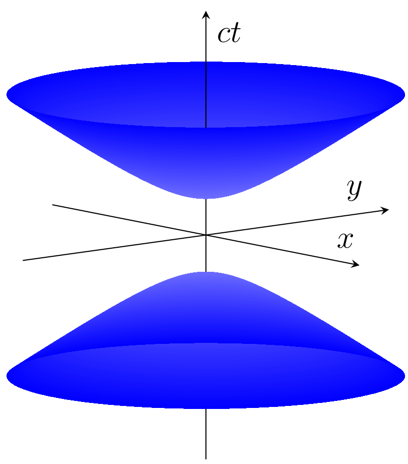

FIG. 4.9 – Hyperboloïde à deux nappes invariant

Les hyperboles invariantes vertes sur les figures précédentes forment un hyperboloïde à une nappe :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = -1$$

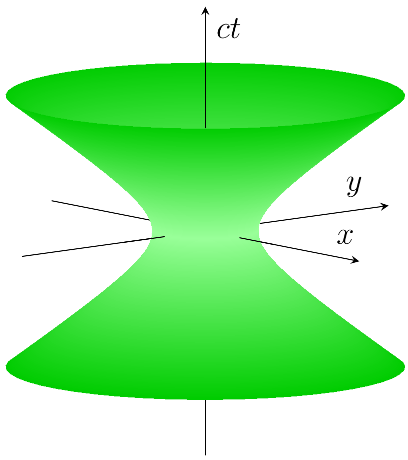

FIG. 4.10 – Hyperboloïde à une nappe invariant

Ces deux espaces hyperboliques à deux et à une nappe sont asymptotes à l'espace conique :

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 = 0$$

Dans la transformation de Lorentz-Poincaré (2.14) p. 24, changeons le temps en durée et la position en distance. En effet, temps et position n'ont pas de sens tant que l'on n'a pas préciser une origine temporelle et spatiale. Ce n'est pas le cas pour les durées et les distances. Le premier évènement a pour coordonnées (t_a, x_a, y_a, z_a), et le second a pour coordonnées (t_b, x_b, y_b, z_b) :

$$\begin{cases} ct'_a = \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_a = \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_a = y_a \\ z'_a = z_a \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_b = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) \\ x'_b = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) \\ y'_b = y_b \\ z'_b = z_b \end{cases}$$

en soustrayant,

$$\begin{cases} ct'_b - ct'_a = \gamma_e(ct_b - \beta_e x_b) - \gamma_e(ct_a - \beta_e x_a) \\ x'_b - x'_a = \gamma_e(x_b - \beta_e ct_b) - \gamma_e(x_a - \beta_e ct_a) \\ y'_b - y'_a = y_b - y_a \\ z'_b - z'_a = z_b - z_a \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma_e(c\Delta t - \beta_e \Delta x) \\ \Delta x' = \gamma_e(\Delta x - \beta_e c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Avec la convention d'une signature $(+,-,-,-)$, le carré de l'intervalle entre ces deux évènements s'écrit :

$$\begin{aligned} s^2 &= (ct_b - ct_a)^2 - (x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2 - (z_b - z_a)^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2}$$

a) Intervalle du genre lumière

Lorsque les parties temporelle et spatiale du carré de l'intervalle sont égales, celui-ci est nul, il est dit *isotrope* ou du *genre lumière*. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre lumière constituent les deux nappes du cône de lumière, l'une pour laquelle $t > 0$, l'autre pour laquelle $t < 0$. L'évènement origine ne peut interagir avec ces évènements qu'avec des signaux se déplaçant à la vitesse limite, venant du passé vers l'évènement origine, ou émis vers le futur à partir de l'évènement origine.

b) Intervalle du genre temps

Lorsque la partie temporelle du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie spatiale, l'intervalle est dit du *genre temps*. s^2 est alors positif et s est un nombre réel, relation (3.4) p. 39. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre temps sont dans le cône de lumière. L'intérieur de la nappe supérieure du cône de lumière est appelé *futur absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine pourra éventuellement être la cause d'un ou plusieurs de ces évènements. L'intérieur de la nappe inférieure est appelé *passé absolu* de l'évènement origine. Certains de ces évènements peuvent éventuellement être la cause de l'évènement origine.

Dans l'espace-temps, soient o et Q deux évènements tels que Q soit dans le futur absolu de o. Il existe un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x_Q est supérieure à x_o, un référentiel galiléen dans lequel o et Q ont même coordonnée $x'_o = x'_Q$, et un référentiel galiléen dans lequel la coordonnée x''_Q est inférieure à x''_o.

Si l'on considère que Q est dans le passé absolu de o, leurs rôles sont inversés.

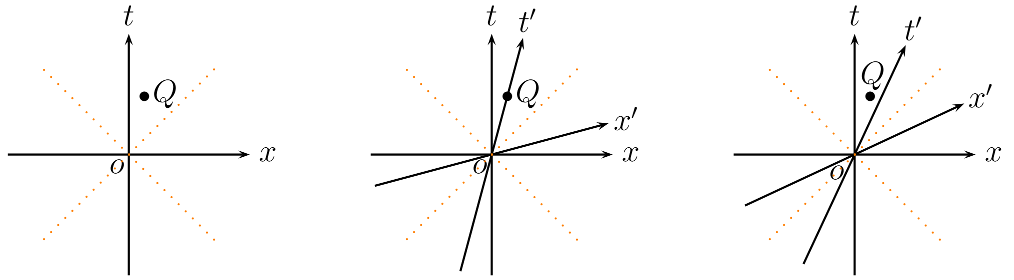

Fig. 4.11 – Évènement Q dans le futur absolu de o

c) Intervalle du genre espace

Lorsque la partie spatiale du carré de l'intervalle est supérieure à sa partie temporelle, l'intervalle est dit du *genre espace*. s^2 est alors négatif et s est imaginaire. Les évènements dont l'intervalle avec l'évènement origine est du genre espace sont à l'extérieur du cône de lumière, cet endroit est appelé *ailleurs absolu* de l'évènement origine. L'évènement origine ne peut interagir d'aucune façon avec les évènements qui en font partie, il ne peut y avoir de lien causal entre l'évènement origine et ces évènements.

Dans l'espace-temps, soient o et Q deux évènements tels que Q soit dans l'ailleurs absolu de o. Il existe alors un référentiel galiléen dans lequel Q est postérieur à o, un référentiel galiléen dans lequel o et Q sont simultanés, et un référentiel galiléen dans lequel Q est antérieur à o.

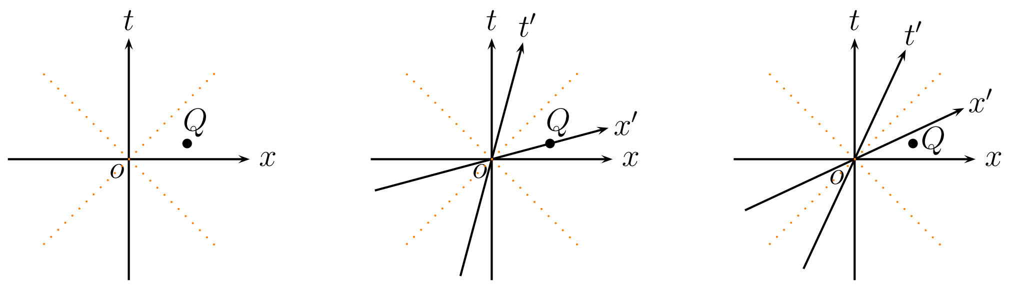

Fig. 4.12 – Évènement Q dans l'ailleurs absolu de o

Du fait de l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, le genre de l'intervalle est lui-même indépendant de tout référentiel. Ainsi la causalité est préservée. Si un évènement est la cause d'un autre évènement, ce sera aussi le cas dans tout autre référentiel galiléen.

4.2.2 Diagramme de Poincaré

Dans ce paragraphe nous prendrons $c = 1$. Nous pouvons obtenir un cercle plutôt que deux hyperboles, en écrivant,

$$x^2 + (it)^2 = 1$$

et en posant $\mathrm{t} = it$:

$$x^2 + \mathrm{t}^2 = 1$$

En prenant un temps imaginaire l'espace-temps devient euclidien. Dans la transformation de Lorentz-Poincaré (2.14) p. 24, remplaçons $-t$ par $i^2 t$ dans la première relation, et multiplions la seconde par i :

$$\begin{cases} it' = \gamma_e(it) - iv_e\gamma_e x \\ x' = \gamma_e x + iv_e\gamma_e(it) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{t}' = \gamma_e \mathrm{t} - iv_e\gamma_e x \\ x' = \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{4.1}$$

Sur l'axe t' nous avons $x' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ \mathrm{t} &= -x/(iv_e) \end{aligned}$$

De même, sur l'axe x' nous avons $\mathrm{t}' = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_e \mathrm{t} - iv_e\gamma_e x \\ \mathrm{t} &= iv_e x \end{aligned}$$

En posant,

$$iv_e \triangleq \tan\psi \tag{4.2}$$

la transformation de Lorentz-Poincaré est une rotation d'angle imaginaire ψ dans l'espace-temps de Poincaré (x, it), appelée *rotation hyperbolique*.

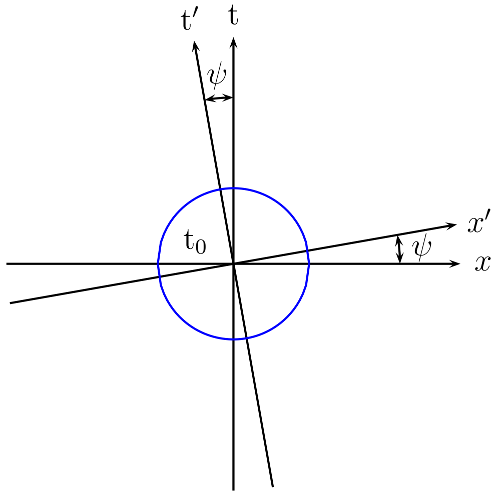

FIG. 4.13 – Diagramme de Poincaré

REMARQUE 4.2.2. *Le cercle est bien invariant par rotation des axes, mais les évènements formant le cercle n'ont pas les mêmes coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Cette remarque est en lien avec la remarque 4.2.1 p. 47.*

La trigonométrie nous donne :

$$\begin{cases} \cos\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \\ \sin\psi = \dfrac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_e^2}} \\ \sin\psi = \dfrac{iv_e}{\sqrt{1-v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\psi = \gamma_e \\ \sin\psi = iv_e\gamma_e \end{cases}$$

La transformation de Lorentz-Poincaré (4.1) p. 50 devient :

$$\begin{cases} \mathrm{t}' = -iv_e\gamma_e x + \gamma_e \mathrm{t} \\ x' = \gamma_e x + iv_e\gamma_e \mathrm{t} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{t}' = -x\sin\psi + \mathrm{t}\cos\psi \\ x' = x\cos\psi + \mathrm{t}\sin\psi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{t}' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{t} \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le passage du référentiel galiléen $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$ puis au référentiel $\mathcal{R}''$ s'effectue par deux rotations successives dont la somme des angles est l'angle de rotation final :

$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2$$

En appelant *rapidité* l'angle réel φ tel que,

$$\psi \triangleq i\varphi$$

nous avons alors en multipliant par i la relation précédente :

$$\boxed{\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2}$$

Les rapidités s'additionnent comme le font les vitesses en relativité galiléenne. La rapidité est le paramètre additif du groupe de transformation de Lorentz-Poincaré, c'est l'analogue de l'angle de rotation pour le groupe des rotations dans le plan. Avec les coordonnées réelles (x, y, z, t) la géométrie est pseudo-euclidienne. Avec les coordonnées (x, y, z, it) la géométrie est euclidienne mais la coordonnée temporelle est imaginaire. À la rotation euclidienne d'angle imaginaire ψ correspond la rotation pseudo-euclidienne d'angle réel φ.

Reprenons la définition 4.2 p. 50 :

$$\begin{aligned} iv_e &\triangleq \tan\psi \\ &= \tan(i\varphi) \\ &= i\tanh\varphi \\ v_e &= \tanh\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \triangleq \arg\tanh v_e} \tag{4.3}$$

La trigonométrie hyperbolique nous donne :

$$\begin{cases} \cosh\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tanh^2\varphi}} \\ \sinh\varphi = \dfrac{\tanh\varphi}{\sqrt{1+\tanh^2\varphi}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_e^2}} \\ \sinh\varphi = \dfrac{v_e}{\sqrt{1-v_e^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh\varphi = \gamma_e \\ \sinh\varphi = v_e\gamma_e \end{cases}$$

La transformation de Lorentz-Poincaré (2.14) p. 24 s'écrit :

$$\begin{cases} t' = -\gamma_e v_e x + \gamma_e t \\ x' = \gamma_e x - \gamma_e v_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -x\sinh\varphi + t\cosh\varphi \\ x' = x\cosh\varphi - t\sinh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ \cosh\varphi & -\sinh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5 Covariance et contravariance

5.1 Retour sur la notion de vecteur

Soit $\boldsymbol{x}$ une suite ordonnée de nombres réels :

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Appelons E l'ensemble des suites de nombres réels telles que $\boldsymbol{x}$, et adoptons dans E les deux lois de composition suivantes :

— la somme dite *vectorielle* consiste à additionner terme à terme chacun des nombres de deux de ces suites pour former une nouvelle suite ordonnée de nombres :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
&= (z_1, z_2, \dots, z_n) \\
&= \boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

— la multiplication par un réel quelconque α donne une nouvelle suite ordonnée de nombres :

$$\begin{aligned}
\alpha\boldsymbol{x} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \\
&= (u_1, u_2, \dots, u_n) \\
&= \boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

L'ensemble E muni ces deux lois de composition constitue un espace vectoriel sur le corps des réels (car $\alpha \in \mathbb{R}$). Les éléments de E sont des *vecteurs* et les nombres sont les *composantes* de ces vecteurs.

5.1.1 Composantes contravariantes

Ces deux lois ont pour conséquence immédiate que tout vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs de référence, appelés *vecteurs de base* de l'espace vectoriel. Par exemple, soient $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ les vecteurs de base de l'espace vectoriel E_2 de dimension 2. Dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, ils ont pour composantes :

$$\boldsymbol{e}_1(1, 0) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{e}_2(0, 1)$$

Dans cette base le vecteur $\boldsymbol{v}$ a pour composantes v^1 et v^2, telles que :

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v}(v^1, v^2) \tag{5.1}$$

Ces composantes sont dites *contravariantes.*

NOTATION 5.1.1. *Par convention, les composantes contravariantes sont notées avec un indice supérieur.*

En général lorsqu'on ne précise pas c'est que l'on parle des composantes contravariantes. Par exemple les composantes contravariantes d'un évènement (Fig. 4.6 p. 45).

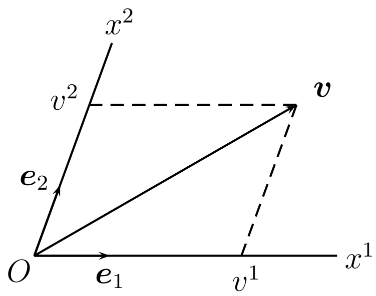

FIG. 5.1 – Composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans une base normée

Lorsque la base est normée, les composantes contravariantes et les coordonnées du point représentatif du vecteur sont confondues. Ce n'est plus le cas lorsque la base n'est pas normée.

EXEMPLE 5.1.1. *Soit un point M de coordonnées $(6; 2)$. On considère la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ telle que $\|\boldsymbol{e}_1\| = 2$ et $\|\boldsymbol{e}_2\| = 1$.*

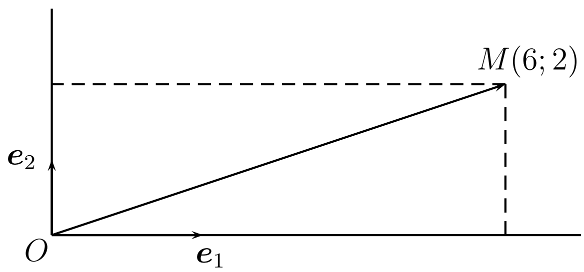

FIG. 5.2 – Coordonnées et composantes

Dans cette base, nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$$

Le point M a pour coordonnées $(6; 2)$ alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ a pour composantes $(3; 2)$.

5.1.2 Composantes covariantes

Si l'on définit un produit scalaire, les composantes peuvent aussi être les projections du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur les vecteurs de base :

$$\begin{cases} v_1 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ v_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{5.2}$$

Ces composantes sont dites *covariantes*.

Notation 5.1.2. *Par convention, les composantes covariantes sont notées avec un indice inférieur.*

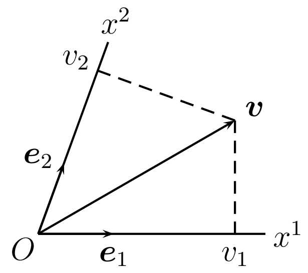

Fig. 5.3 – Composantes covariantes du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans une base normée

Les composantes covariantes et les coordonnées du point représentatif du vecteur ne sont confondues que lorsque la base est orthonormée, et dans ce cas les composantes covariantes et contravariantes sont confondues.

Lorsque la base n'est pas orthonormée, on note que :

$$\boldsymbol{v} \neq v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2$$

Remarque 5.1.1. *Pour chaque coordonnée x^1, x^2, il existe deux composantes, l'une contravariante, l'autre covariante.*

La *variance*, c'est-à-dire le fait d'être covariant ou contravariant, ne s'applique qu'aux composantes. Bien qu'ayant un indice supérieur, les coordonnées ne sont ni contravariantes ni covariantes.

Nous pouvons passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes :

$$\begin{aligned} u_i &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_j \left(u^j \boldsymbol{e}_j \right) \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_j u^j \left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i \right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans une base donnée, tout vecteur peut être exprimé en composantes contravariantes ou covariantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (u^1, u^2) \\ &= (u_1, u_2) \end{aligned}$$

5.2 Base réciproque

Pour toute base $(\boldsymbol{e}_n)$ d'un espace vectoriel E_n, il existe une base $(\boldsymbol{\epsilon}_n)$ de E_n appelée *base réciproque* de $(\boldsymbol{e}_n)$ telle que

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \triangleq \delta_{ij} \tag{5.4}$$

Cherchons l'expression des composantes contravariantes v^i du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la base réciproque :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \mathrm{v}^i \boldsymbol{\epsilon}_i \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j &= \mathrm{v}^i \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \\
v_j &= \mathrm{v}^i \delta_{ij} \\
&= \mathrm{v}^j
\end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}$ a donc pour expression :

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{\epsilon}_i \tag{5.5}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= v^i \boldsymbol{e}_i \\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j &= v^i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \\
\mathrm{v}_j &= v^i \delta_{ij} \\
&= v^j
\end{aligned}$$

Les composantes changent de variance dans la base réciproque.

Exemple 5.2.1. *Soit $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ une base normée d'un espace vectoriel E_2, telle que $(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}) = 70°$.*

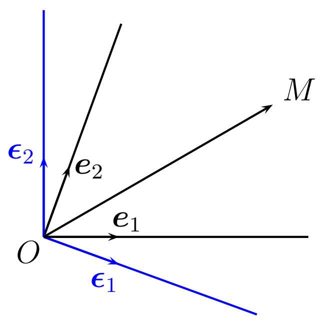

Fig. 5.4 – Bases réciproques

Déterminons sa base réciproque en utilisant la définition 5.4 :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0 \ \textit{donne la direction de } \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 \ \textit{donne le sens de } \boldsymbol{\epsilon}_1 \textit{ et } \|\boldsymbol{\epsilon}_1\| \|\boldsymbol{e}_1\| \cos(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\epsilon}_1) = 1 \\
&\|\boldsymbol{\epsilon}_1\| = \frac{1}{\cos 20} \approx 1,064
\end{aligned}$$

De même :

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \textit{ donne la direction de } \boldsymbol{\epsilon}_2$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1 \textit{ donne le sens de } \boldsymbol{\epsilon}_2 \textit{ et } \|\boldsymbol{\epsilon}_2\|\|\boldsymbol{e}_2\| \cos(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\epsilon}_2) = 1$$
$$\|\boldsymbol{\epsilon}_2\| = \frac{1}{\cos 20} \approx 1,064$$

Exemple 5.2.2. *Déterminons la base réciproque de la base polaire orthonormée* $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ *:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 1 \\ \boldsymbol{\epsilon}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\epsilon}_\rho\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_\rho\|} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\rho = 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{\epsilon}_\theta\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_\theta\|} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon}_\theta = \boldsymbol{e}_\theta$$

6

Système de coordonnées

6.1 Base naturelle

Définition 6.1.1. *Lignes de coordonnées*
Les lignes de coordonnées sont le lieu des points pour lesquels une seule coordonnée varie.

On utilise les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées pour définir une base.

Définition 6.1.2. *Base naturelle*
Soit $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *un système de coordonnées quelconques, curvilignes ou rectilignes, orthogonales ou non. En tout point* M *nous définissons une base locale* $(\boldsymbol{e}_i)$*, appelée base naturelle du système de coordonnées* (x_i) *au point* M*, formée par les vecteurs tangents en* M *aux lignes de coordonnées :*

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \boldsymbol{e}_i \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i}$$

Exemple 6.1.1. *La base naturelle des coordonnées galiléennes réduites est pseudo-orthogonale directe. Elle est normée si l'on pose* $c = 1$ *(relation (2.3) p. 14).*

Dans un système de coordonnées curviligne on ne peut pas définir de base globale, on définit une base locale en chaque point, les $\boldsymbol{e}_i$ forment alors un champ de vecteurs. En général les vecteurs de la base naturelle ne sont pas de norme unité, par exemple dans la base polaire $\|\boldsymbol{e}_\theta\| = \rho$. Sauf précision contraire, on se placera toujours dans la base naturelle du système de coordonnées.

Exemple 6.1.2. *Coordonnées polaires*
En coordonnées polaires, les lignes de coordonnée $\rho = C^{ste}$ *sont des cercles centrés sur l'origine. Les lignes de coordonnée* $\theta = C^{ste}$ *sont des demi-droites issues de l'origine (Fig. 6.1).*

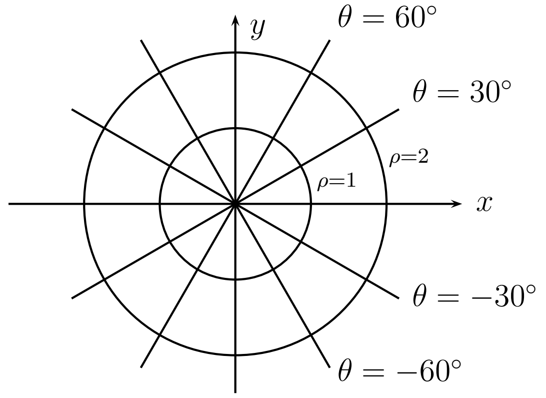

FIG. 6.1 – Coordonnées polaires (ρ, θ)

Les vecteurs perpendiculaires en M aux lignes de coordonnées forment la base réciproque.

Les vecteurs de la base naturelle polaire peuvent être exprimés en fonction des vecteurs de la base cartésienne :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \rho}\right)_\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \theta}\right)_\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \boldsymbol{e}_\theta = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_x + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_x + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\rho\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \rho\cos\theta\,\boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

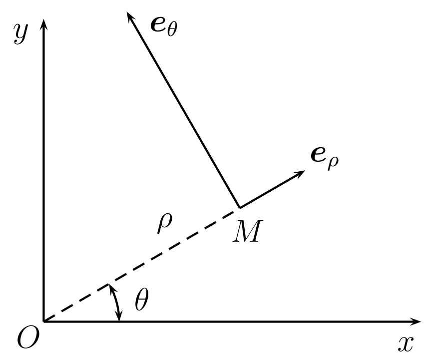

FIG. 6.2 – Base naturelle au point M en coordonnées polaires (ρ, θ)

6.2 Repère naturel

Un repère est l'ensemble d'un point pris pour origine et d'une base. L'espace-temps de la relativité restreinte est un espace pré-eucldien, c'est-à-dire plat. Dans les espaces plats nous pouvons toujours utiliser un système de coordonnées rectangulaires, auquel on associe une base naturelle $(\boldsymbol{e}_i)$ globale et de facto orthonormée, dont les vecteurs de base ne sont pas fonction de la position. On peut alors utiliser un repère naturel global $(O, \boldsymbol{e}_i)$, qui est l'ensemble d'un point O pris pour origine (du temps et de l'espace) et d'une base naturelle globale.

6.3 Changement de base naturelle

Tout changement de coordonnées induit un changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{i'} &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^{i'}} \\ &= \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \\ &= \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \boldsymbol{e}_j\end{aligned}$$

Par exemple pour le changement de coordonnées $X = 2x$, on a $\boldsymbol{e}_X = \frac{\partial x}{\partial X} \boldsymbol{e}_x = \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_x$. Les vecteurs de base et les coordonnées varient de façon contraire.

Nous utiliserons la convention d'écriture suivante : le signe de sommation est sous-entendu lorsque dans un monôme le même indice est en haut et en bas :

$$\boxed{\boldsymbol{e}_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \boldsymbol{e}_j}$$

6.4 Changement de coordonnées

Un système de coordonnées ne sert qu'à repérer des objets mathématiques ou physiques dans un espace, par conséquent tout vecteur doit être indépendant du système de coordonnées dans lequel on l'exprime. En se servant des relations (5.1) p. 54 et (5.2) p. 55, nous voyons qu'un vecteur étant invariant par changement de coordonnées, donc par changement de base naturelle, ses composantes

a) *contravariantes* sont multipliées dans le rapport inverse des vecteurs de la base naturelle, d'où le terme contravariant. En effet, en partant de l'invariance par changement de base naturelle :

$$\begin{aligned}u^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} &= u^j \boldsymbol{e}_j \\ &= u^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \boldsymbol{e}_{i'}\end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{u^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} u^j}$$

b) *covariantes* sont multipliées dans le même rapport que les vecteurs de la base naturelle, d'où le terme covariant. En effet, en partant de la définition des composantes covariantes dans la base primée :

$$\begin{aligned}
u_{i'} &= \overrightarrow{OM} \cdot \boldsymbol{e}_{i'} \\
&= \overrightarrow{OM} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} (\overrightarrow{OM} \cdot \boldsymbol{e}_j)
\end{aligned}$$

soit :

$$u_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} u_j$$

La covariance ou la contravariance des nombres d'une suite ordonnée sont-elles des conditions suffisantes pour former un vecteur ?

Soit une suite ordonnée de n nombres covariants. Si nous l'additionnons à une autre suite de n nombres covariants ou si nous multiplions chacun des nombres de cette suite par un même scalaire, alors nous obtenons une suite de n nombres covariants. Ce sont donc bien des vecteurs. Nous pouvons tenir le même raisonnement pour une suite de n nombres contravariants.

La covariance ou la contravariance des nombres d'une suite ordonnée est donc une condition nécessaire et suffisante pour former un vecteur. Nous pouvons donner une nouvelle définition des vecteurs : un vecteur est une suite ordonnée de nombres covariants ou contravariants par changement de coordonnées.

7 Tenseur métrique

7.1 Base naturelle et métrique de l'espace

Soit $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M. Dans la base naturelle au voisinage du point M :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i}\, dx^i \\ &= \boldsymbol{e}_i dx^i \end{aligned}$$

Dans cette base naturelle, la distance infinitésimale ou métrique de l'espace, a pour expression :

$$\begin{aligned} ds &= \|d\overrightarrow{OM}\| \\ ds^2 &= d\overrightarrow{OM} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= \boldsymbol{e}_i dx^i \cdot \boldsymbol{e}_j dx^j \\ &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j dx^i dx^j \end{aligned}$$

Dans le domaine dans lequel elle est définie, la métrique contient toute l'information géométrique et topologique de l'espace qu'elle décrit.

Exemple 7.1.1. *Métrique de la sphère*
En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) le carré de la métrique d'une sphère de rayon r (la coordonnée r est fixe) a pour expression

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

Dans ce système de coordonnées le carré de la métrique est positif quelles que soient les valeurs prisent par les coordonnées θ et ϕ, car les distances $r\theta$ et $r\phi$ sont sur la sphère. La métrique est réelle. À partir de cette métrique de la sphère (et des autres) nous retrouvons toutes les propriétés de la sphère, les géodésiques sont des grands cercles et sa surface vaut $4\pi r^2$.

Remplaçons la coordonnée θ par l'axe z des coordonnées rectangulaires en effectuant la transformation de coordonnées suivante :

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta \\ z^2 &= r^2\cos^2\theta \\ &= r^2(1-\sin^2\theta) \\ r^2 - z^2 &= r^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(z/r) \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{-1/r}{\sqrt{1-z^2/r^2}} \\ d\theta &= \frac{-dz}{\sqrt{r^2-z^2}} \\ d\theta^2 &= \frac{dz^2}{r^2-z^2} \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles coordonnées (z,ϕ), la métrique s'écrit :

$$ds^2 = \frac{r^2 dz^2}{r^2-z^2} + \left(r^2 - z^2\right) d\phi^2$$

La coordonnée z n'est pas sur la surface de la sphère et permet d'en sortir. Pour $|z| < r$ nous sommes sur la sphère de rayon r et $ds^2 > 0$, en revanche pour $|z| > r$ nous sommes en dehors de la sphère de rayon r, $ds^2 < 0$ et la métrique est imaginaire. Un ds^2 négatif indique que l'on est dans l'espace dans lequel est plongé l'objet géométrique mais en dehors de l'objet.

Passons en coordonnées polaires (ρ,ϕ) à la surface de la sphère. On pose $\rho = \theta r$ le déplacement à la surface de la sphère :

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2\sin^2(\rho/r)\, d\phi^2$$

Le carré de la métrique est positif quelles que soient les valeurs de ρ et θ, la métrique est réelle.

Exemple 7.1.2. *Métrique de l'espace-temps*
La métrique de l'espace-temps en convention de genre temps est donnée par la définition 2.1.1 p. 16. Lorsque le s^2 est positif, b) p. 49, nous sommes dans l'espace-temps de l'observateur, dans son futur absolu ou dans son passé absolu. Lorsque le s^2 est négatif, c) p. 49, nous sommes en dehors de l'espace-temps de l'observateur. Les évènements dont le s^2 avec l'évènement origine est négatif, n'existent pas pour l'observateur à l'origine (à ce moment précis et à cet endroit précis).

Définition 7.1.1. *Soit $(\boldsymbol{e}_i)$ une base naturelle, la matrice $\boldsymbol{g}$ de composantes g_{ij} telles que,*

$$g_{ij} \triangleq \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

est appelée tenseur métrique ou tenseur fondamental.

Il est symétrique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i \\ g_{ij} &= g_{ji} \end{aligned}$$

Exemple 7.1.3. *En coordonnées polaires, le tenseur métrique s'écrit :*

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons l'expression du carré de la métrique :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

Exemple 7.1.4. *Dans l'espace de la physique classique non relativiste, plaçons nous dans la base canonique, c'est-à-dire la base orthonormée $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$. Le tenseur métrique s'écrit :*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 7.1.5. *Soit $\{\boldsymbol{e}_1(2,0), \boldsymbol{e}_2(-1,3)\}$ une base de l'espace vectoriel E_2. Le tenseur métrique s'écrit :*

$$\begin{cases} g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ g_{12} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ g_{21} = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ g_{22} = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 4 \\ g_{12} = -2 \\ g_{21} = -2 \\ g_{22} = 10 \end{cases} \Rightarrow [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Cette base est non orthogonale, non normée.

En relativité restreinte, le tenseur métrique de l'espace de Poincaré-Minkowski est noté $\eta_{\alpha\beta}$. À partir du carré de l'intervalle d'espace-temps de signature $(+,-,-,-)$, déf. 2.1.1 p. 16

$$\begin{aligned} s^2 &= \Delta(ct)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \end{aligned} \tag{7.1}$$

on déduit son expression :

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ce tenseur structure l'espace-temps de la relativité restreinte. Notons $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base (pseudo-orthonormale) de l'espace-temps, avec $\boldsymbol{e}_0$ le vecteur de base de la coordonnée temporelle :

$$\begin{bmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les termes carrés valent 1 ou -1, les termes rectangles (non diagonaux) sont tous nuls.

7.2 Utilité du tenseur métrique

7.2.1 Métrique de l'espace

$$\boxed{ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j}$$

7.2.2 Changement de composantes

La relation (5.3) p. 55 devient :

$$\boxed{u_i = g_{ij} u^j} \tag{7.2}$$

7.2.3 Expression du produit scalaire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= u^i \boldsymbol{e}_i \cdot v^j \boldsymbol{e}_j \\ &= u^i v^j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= g_{ij} u^i v^j \\ &= u_j v^j \\ &= u^i v_i \end{aligned}} \tag{7.3}$$

7.2.4 Expression de la base réciproque

Exprimons le vecteur $\boldsymbol{e}_i$ dans la base réciproque :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i &= \sum_j A_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k &= \sum_j A_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \\ g_{ik} &= \sum_j A_{ij}\, \delta_{jk} \\ &= A_{ik} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_j g_{ij}\,\boldsymbol{\epsilon}_j$$

Le tenseur métrique permet de passer d'une base réciproque à sa base d'origine. Nous voyons que cette relation est l'équivalent pour des vecteurs, de la relation (7.2) p. 66 qui s'appliquait à des composantes. Par analogie, les vecteurs de la base réciproque seront notés avec un indice supérieur, ce qui permet l'emploi de la convention de sommation. En remplaçant $\boldsymbol{\epsilon}_j$ par $\boldsymbol{e}^j$, la dernière relation s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{e}_i = g_{ij}\,\boldsymbol{e}^j}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_0 &= g_{00}\,\boldsymbol{e}^0 + g_{01}\,\boldsymbol{e}^1 + g_{02}\,\boldsymbol{e}^2 + g_{03}\,\boldsymbol{e}^3 \\ &= \boldsymbol{e}^0\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= g_{10}\,\boldsymbol{e}^0 + g_{11}\,\boldsymbol{e}^1 + g_{12}\,\boldsymbol{e}^2 + g_{13}\,\boldsymbol{e}^3 \\ &= -\boldsymbol{e}^1\end{aligned}$$

La définition (5.4) p. 56 s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j \triangleq \delta_i^j}$$

La relation (5.5) p. 56 devient :

$$\boxed{\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}^i}$$

Nous pouvons définir le tenseur réciproque :

$$\boxed{g^{ij} \triangleq \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}g^{00} &= \boldsymbol{e}^0 \cdot \boldsymbol{e}^0 \\ &= \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 \\ &= 1\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}g^{11} &= \boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}^1 \\ &= (-\boldsymbol{e}_1) \cdot (-\boldsymbol{e}_1) \\ &= -1\end{aligned}$$

Le tenseur métrique et son tenseur réciproque sont égaux et inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned}g^{kj} &= \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}^j \\ g_{ik}\,g^{kj} &= g_{ik}\,\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}^j \\ g_i^j &= \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j\end{aligned}$$

$$\boxed{g_{ik}\,g^{kj} = \delta_i^j}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_i\boldsymbol{e}^i \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}^j &= u_i\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^j\end{aligned}$$

$$\boxed{u^j = g^{ij}u_i}$$

8 Cinématique relativiste

8.1 Changement de référentiel

8.1.1 Mécanique non relativiste

En mécanique non relativiste,

— l'espace physique a trois coordonnées d'espace et est modélisé par un espace mathématique à trois dimensions. Le temps n'est pas une coordonnée c'est un paramètre, tout comme la vitesse relative des référentiels. Les vecteurs ont trois composantes.

— un changement de coordonnées est purement spatial, par exemple de cartésiennes à sphériques

— un changement de référentiel implique une transformation de Galilée, qui n'est pas une transformation de coordonnées

— les vecteurs champ électrique et champ magnétique dépendent de la vitesse relative, ils ne sont pas invariants par la transformation de Galilée

8.1.2 Mécanique relativiste

En relativité restreinte,

— l'espace-temps physique a trois coordonnées d'espace et une de temps, et est modélisé par un espace mathématique à quatre dimensions. Les vecteurs ont quatre composantes.

— un changement de coordonnées purement spatial est encore possible, par exemple de cartésiennes à sphériques

— un changement de référentiel implique une transformation de coordonnées entre la coordonnée temporelle et au moins une coordonnée d'espace, appelée transformation de Lorentz-Poincaré

— les vecteurs et tenseurs sont tous indépendants de la vitesse relative et sont invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré

— les vecteurs champ électrique et champ magnétique sont remplacés par le tenseur champ électromagnétique

8.2 Trivecteurs et quadrivecteurs

Dotons l'espace-temps plat de la relativité restreinte d'un système de coordonnées rectangulaires, dont la base naturelle associée est orthonormée. Les vecteurs sont des *objets géométriques* indépendants du repère ou de la base dans lesquels on les exprime. Dans l'espace-temps de dimension quatre de la relativité restreinte nous allons construire des vecteurs, appelés *quadrivecteurs*, ou *4-vecteurs*, ou encore *vecteurs d'univers*. Ils seront par construction invariants par changement de base naturelle associé à un changement de coordonnées spatio-temporelles :

Les quadrivecteurs sont invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Notation 8.2.1. *Les quadrivecteurs n'étant rien d'autre que des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension quatre sur $\mathbb{R}$, nous utilisons la notation habituelle des vecteurs en caractères gras. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, le quadrivecteur $\boldsymbol{q}$ a pour composantes contravariantes :*

$$\boldsymbol{q}\begin{pmatrix} q^t \\ q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix} \qquad ou \qquad \boldsymbol{q}\left(q^t, q^x, q^y, q^z\right)$$

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, le même quadrivecteur s'écrit :

$$\boldsymbol{q}'\begin{pmatrix} q'^t \\ q'^x \\ q'^y \\ q'^z \end{pmatrix} \qquad ou \qquad \boldsymbol{q}'\left(q'^t, q'^x, q'^y, q'^z\right)$$

Nous utiliserons aussi la notation suivante qui met en évidence les parties temporelle et spatiale,

$$\boldsymbol{q}\begin{pmatrix} q^t \\ \vec{q} \end{pmatrix} \qquad ou \qquad \boldsymbol{q}\left(q^t, \vec{q}\right)$$

où les trivecteurs purement spatiaux sont surmontés d'une flèche.

Remarque 8.2.1. *Le prime sur le vecteur et sur les composantes n'a pas le même sens. Sur les composantes il indique que celles-ci sont différentes. Sur le vecteur il indique la base depuis laquelle il est observé.*

Notation 8.2.2. *En notation indicielle on note la composante temporelle avec l'indice zéro plutôt que quatre, pour faire le lien avec la notation habituelle en relativité générale :*

$$\boldsymbol{q}\begin{pmatrix} q^0 \\ q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{q}\left(q^0, q^1, q^2, q^3\right) \qquad \boldsymbol{q}\left(q^0, q^i\right) \quad i = 1, 2, 3 \qquad q^\mu \quad \mu = 0, \ldots, 3$$

Remarque 8.2.2. *La présence de virgules indique qu'il ne s'agit pas de la transposée d'une matrice unicolonne représentant un vecteur :*

$$\boldsymbol{v}(v^1, v^2) \neq \boldsymbol{v}\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix}$$

En revanche

$$\boldsymbol{v}(v^1, v^2) = \boldsymbol{v}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \qquad et \qquad \boldsymbol{v}^t\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix}$$

Remarque 8.2.3. *Nous n'utiliserons pas l'abus d'écriture qui consiste à écrire l'égalité entre un vecteur et ses composantes. Par exemple pour le quadrivecteur* $\boldsymbol{q}$*, on aurait l'implication fausse suivante*

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}' \qquad \Rightarrow \qquad (q^t, \vec{q}) = (q'^t, \vec{q}')$$

ce qui est faux puisque pour les composantes il faut passer par la matrice de Lorentz.

8.3 Trivecteur position et quadrivecteur position

8.3.1 Trivecteur position

Définition 8.3.1. *Trivecteur position* $\vec{r}$
Dans un espace ponctuel euclidien de système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) *de centre le point* $O(0,0,0)$*, à tout point* $P(x, y, z)$ *on associe un trivecteur position* $\vec{r}$*, tel que*

$$\vec{r} \triangleq \overrightarrow{OP}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z), il a pour composantes contravariantes :

$$\vec{r}(x, y, z)$$

Le trivecteur position est aussi appelé rayon-vecteur ou simplement vecteur position.

8.3.2 Quadrivecteur position

Soit un évènement ayant des coordonnées spatio-temporelles dans un référentiel donné. Dans la base naturelle associée à ce système de coordonnées on construit notre premier quadrivecteur, le *quadrivecteur position* qui relie le centre du repère à cet évènement. La base étant naturelle, les composantes contravariantes du quadrivecteur position sont confondues avec les coordonnées de l'évènement.

Définition 8.3.2. *Quadrivecteur position* $\boldsymbol{r}$
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ *de système de coordonnées galiléennes réduites* (ct, x, y, z) *de centre l'évènement* $O(0,0,0,0)$*, à tout évènement* $E(ct, x, y, z)$ *on associe un quadrivecteur position* $\boldsymbol{r}$*, tel que*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OE}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites (ct, x, y, z) de $\mathcal{R}$, ses composantes contravariantes ont la dimension d'une longueur :

$$\boldsymbol{r}(ct, x, y, z) \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{r}(ct, \vec{r})$$

Ses composantes ont même unité lorsque l'on prend $c = 1$:

$$\boldsymbol{r}(t, \vec{r})$$

Le quadrivecteur position est aussi appelé *quadrirayon-vecteur* ou *quadrivecteur espace-temps*, ou ici *quadrivecteur temps-espace*. Il généralise à l'espace-temps le vecteur position purement spatial en lui ajoutant une composante temporelle.

En notation indicielle :

$$\boldsymbol{r}(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \text{ou} \qquad \forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad x^\mu \tag{8.1}$$

Exemple 8.3.1. *Quadrivecteur position de Bob dans le référentiel d'Anna*
Dans le référentiel $\mathcal{R}$ *d'Anna de temps propre* t*, le quadrivecteur position de Bob, « relie » dans l'espace-temps le centre du référentiel* $\mathcal{R}$ *d'Anna au centre du référentiel* $\mathcal{R}'$ *de Bob. Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites du référentiel* $\mathcal{R}$ *d'Anna, il a pour composantes contravariantes* ($c = 1$) *:*

$$\boldsymbol{r}(t, x, y, z)$$

Remarque 8.3.1. *Dans le référentiel propre de Bob, de temps propre* t'*, le quadrivecteur position de Bob n'est nul qu'à l'instant initial* $t' = 0$ ($c = 1$) *:*

$$\boldsymbol{r}'\,(t', \vec{0})$$

8.3.3 Pseudo-norme du quadrivecteur position

Les quadrivecteurs étant invariants par la transformation de Lorentz-Poincaré, leur longueur ou *quadri-norme*, leur direction et leur sens sont invariants :

La quadri-norme est invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré

Prenons pour quadri-norme du quadrivecteur position de composantes (ct, x, y, z) l'intervalle entre l'évènement origine $(0, 0, 0, 0)$ et l'évènement de coordonnées (ct, x, y, z), c'est-à-dire la métrique (déf. 2.1.1 p. 16), dont le carré s'écrit en convention de genre temps :

$$\|\boldsymbol{r}\|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{8.2}$$

D'après (2.4) p. 16, la quadri-norme du quadrivecteur position est alors par construction invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré.

8.3.4 Transformation spéciale des composantes du quadrivecteur position

On rappelle que les quadrivecteurs sont invariants par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ils ne se transforment donc pas mais leurs composantes changent. De plus, à tout point de l'espace-temps correspond un quadrivecteur de composantes contravariantes les coordonnées de ce point. Le lien entre les composantes du quadrivecteur position dans deux référentiels est donc donné par la transformation spéciale de Lorentz des coordonnées (2.15) p. 25 ($c = 1$) :

$$\boldsymbol{r}'\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} t' = \gamma_e\,(t - v_e x) \\ x' = \gamma_e(x - v_e t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

En notation indicielle :

$$\boldsymbol{r}'\begin{pmatrix}x'^0\\x'^1\\x'^2\\x'^3\end{pmatrix}=\boldsymbol{r}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\qquad\text{avec}\qquad\begin{cases}x'^0=\gamma_e x^0-\gamma_e v_e x^1\\x'^1=-\gamma_e v_e x^0+\gamma_e x^1\\x'^2=x^2\\x'^3=x^3\end{cases}$$

En notation indicielle et matricielle :

$$\begin{pmatrix}x'^0\\x'^1\\x'^2\\x'^3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_e & -\gamma_e v_e & 0 & 0\\-\gamma_e v_e & \gamma_e & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}$$

En notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\forall\mu=0,\ldots,3\qquad x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{8.3}$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes d'un quadrivecteur particulier, donc des composantes des quadrivecteurs en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le vecteur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel. Réciproquement, toute suite ordonnée de quatre nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un quadrivecteur.

Écrivons l'invariance de s^2 (relation (2.4) p. 16) par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, et utilisons les relations (7.1) p. 65 et (8.3) p. 73 :

$$\begin{aligned}s^2&=s'^2\\ \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta&=\eta'_{\gamma\delta}x'^\gamma x'^\delta\\&=\eta'_{\gamma\delta}\Lambda^\gamma_\alpha x^\alpha\Lambda^\delta_\beta x^\beta\\ \eta_{\alpha\beta}&=\Lambda^\gamma_\alpha\Lambda^\delta_\beta\eta'_{\gamma\delta}\end{aligned}$$

Cette relation est la loi de transformation des composantes d'un (quadri-)tenseur d'ordre deux (deux indices) particulier, donc des composantes des tenseurs d'ordre deux en général, lors d'un changement de base (changement de référentiel galiléen par la transformation spéciale de Lorentz). Cette loi de transformation assure que le tenseur reste égal à lui-même lors du changement de référentiel. Réciproquement, toute suite ordonnée de seize nombres qui se transforme de la sorte par changement de référentiel galiléen constitue un quadritenseur. Nous dirons que les vecteurs sont des tenseurs d'ordre un, et que les scalaires sont des tenseurs d'ordre zéro. La valeur d'un quadri-scalaire reste la même par changement de référentiel galiléen.

8.4 Produit scalaire en relativité restreinte

Nous cherchons à définir un produit scalaire dans l'espace-temps de la relativité restreinte. De façon générale, dans la base naturelle $(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ de la relativité restreinte, le quadri-produit scalaire de deux quadrivecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a^0\boldsymbol{e}_0+a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2+a^3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b^0\boldsymbol{e}_0+b^1\boldsymbol{e}_1+b^2\boldsymbol{e}_2+b^3\boldsymbol{e}_3)\\&=a^0b^0\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_0+a^1b^1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a^2b^2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+a^3b^3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\\&=\eta_{00}a^0b^0+\eta_{11}a^1b^1+\eta_{22}a^2b^2+\eta_{33}a^3b^3\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \qquad \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

En notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

Le produit scalaire d'un quadrivecteur avec lui-même doit donner le carré de sa quadri-norme. Or, pour le quadrivecteur position nous avons d'après (8.2) p. 72 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} &= \|\boldsymbol{r}\|^2 \\ &= \pm \left[(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \right] \end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir le quadri-produit scalaire « relativiste » de deux façons selon la convention de signe adoptée pour le carré de la distance d'univers s^2.

— en convention de genre temps (métrique de signature $(+,-,-,-)$), déf. 2.1.1 p. 16 :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \triangleq a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \tag{8.4}$$

qui redonne bien le carré de la quadri-norme (8.2) p. 72 lorsque $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

— en convention de genre espace (métrique de signature $(-,+,+,+)$) :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \triangleq -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

La base naturelle de la relativité restreinte est pseudo-orthonormale. La relation (7.2) p. 66 permet d'exprimer les composantes covariantes à partir des composantes contravariantes. Avec une signature $(+,-,-,-)$:

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00} a^0 \\ a_1 = \eta_{11} a^1 \\ a_2 = \eta_{22} a^2 \\ a_3 = \eta_{33} a^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = a^0 \\ a_1 = -a^1 \\ a_2 = -a^2 \\ a_3 = -a^3 \end{cases} \tag{8.5}$$

Avec une signature $(-,+,+,+)$:

$$\begin{cases} a_0 = \eta_{00} a^0 \\ a_1 = \eta_{11} a^1 \\ a_2 = \eta_{22} a^2 \\ a_3 = \eta_{33} a^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_0 = -a^0 \\ a_1 = a^1 \\ a_2 = a^2 \\ a_3 = a^3 \end{cases}$$

En utilisant la relation (7.2) p. 66, quelle que soit la signature choisie (convention de genre temps ou espace), on a toujours

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= a^\mu b_\mu \\ &= a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \\ &= a_\mu b^\mu \\ &= a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \end{aligned}$$

Le carré de la quadri-norme du quadrivecteur position, relation (8.2) p.72, s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{r}\|^2 &= \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \\ &= x^\mu x_\mu \end{aligned}$$

8.4.1 Invariance du quadri-produit scalaire

La somme de deux quadrivecteurs étant un quadrivecteur, sa quadri-norme est invariante ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

Les quadri-normes $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|$, $\|\boldsymbol{a}\|$ et $\|\boldsymbol{b}\|$ étant invariantes :

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs est invariant par changement de référentiel.

8.5 Trivecteur vélocité

Définition 8.5.1. *Trivecteur vélocité $\vec{v}$*
La vélocité d'une particule d'épreuve dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est le vecteur dérivée du rayon vecteur $\vec{r}(t)$ de la particule d'épreuve dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t d'un observateur dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{8.6}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\vec{v}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Exemple 8.5.1. *Trivecteur vélocité de Bob*
La vélocité de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le vecteur dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre d'Anna :

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Réciproquement, la vélocité d'Anna dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob est la dérivée du rayon vecteur reliant $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$ mesuré par Bob par le temps propre de Bob :

$$\vec{v}'(t') \triangleq \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'}$$

Par symétrie, Anna et Bob mesurent la même vitesse relative $v = \|\vec{v}(t)\| = \|\vec{v}'(t')\|$:

$$\vec{v}'(t') = -\vec{v}(t)$$

8.5.1 Transformation spéciale des composantes du trivecteur vélocité

La vélocité n'étant pas un quadrivecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel ainsi que le trivecteur lui-même.

Soit le nouvel observateur Henri, de vélocité $\vec{v}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna et de vélocité $\vec{v}'$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ de Bob. Lorsque nous serons en présence de trois observateurs, Anna et Bob seront galiléens en configuration standard, leur vitesse relative sera appelée vitesse d'entrainement et notée v_e. Différentions la transformation spéciale de Lorentz (2.15) p. 25 ($c = 1$) entre les référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e\,(dt - v_e dx) \\ dx' = \gamma_e\,(dx - v_e dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

car v_e n'est pas fonction du temps.

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v'_x = \dfrac{dx - v_e dt}{dt - v_e dx} \\ v'_y = \dfrac{dy}{\gamma_e\,(dt - v_e dx)} \\ v'_z = \dfrac{dz}{\gamma_e\,(dt - v_e dx)} \end{cases}$$

En divisant par dt les numérateurs et dénominateurs, nous obtenons la transformation spéciale de Lorentz de la vélocité, qui permet de calculer la vélocité d'Henri dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connait la vélocité d'Henri dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entrainement de Bob et Anna, ($c = 1$) :

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} & \text{(8.7a)} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} & \text{(8.7b)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} & \text{(8.7c)} \end{cases}$$

Remarque 8.5.1. *Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer v'_x, v_x et v_e par v'_x/c, v_x/c et v_e/c, puis simplifier.*

Si Henri est immobile dans le référentiel d'Anna $\vec{v}(0, 0, 0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\vec{v}'(-v_e, 0, 0)$. Si Henri atteint la vitesse limite selon l'axe des x dans le référentiel d'Anna $\vec{v}(c, 0, 0)$, sa vélocité dans le référentiel de Bob s'écrit $\vec{v}'(c, 0, 0)$.

On obtient la transformation inverse de deux façons.

— En inversant les relations :

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma_e\,(1 - v_e v_x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x\,(1 - v_e v_x) + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e\,(1 - v_e v_x) = v_y \\ v'_z \gamma_e\,(1 - v_e v_x) = v_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x - v_e v_x v'_x + v_e = v_x \\ v'_y \gamma_e - v'_y \gamma_e v_e v_x = v_y \\ v'_z \gamma_e - v'_z \gamma_e v_e v_x = v_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e (1 - v_e v_x) \\ v_z = v'_z \gamma_e (1 - v_e v_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = v'_y \gamma_e \left(1 - \dfrac{v_e (v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x}\right) \\ v_z = v'_z \gamma_e \left(1 - \dfrac{v_e (v'_x + v_e)}{1 + v_e v'_x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma_e\,(1 + v_e v'_x)} \end{cases}$$

— En permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + v_e}{1 + v_e v'_x} \\ v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma_e \left(1 + v_e v'_x\right)} \\ v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma_e \left(1 + v_e v'_x\right)} \end{cases}$$

Si Henri est immobile dans le référentiel de Bob $\vec{v}'(0,0,0)$, sa vélocité dans le référentiel d'Anna s'écrit $\vec{v}(v_e,0,0)$. Si Henri atteint la vitesse limite selon l'axe des x dans le référentiel de Bob $\vec{v}'(c,0,0)$, sa vélocité dans le référentiel d'Anna s'écrit $\vec{v}(c,0,0)$. Si la vitesse d'entrainement atteint la vitesse limite $v_e = c$, la vélocité d'Henri dans le référentiel de Bob s'écrit $\vec{v}'(-c,0,0)$, et dans le référentiel d'Anna $\vec{v}(c,0,0)$.

Le carré de la norme de la vélocité d'Henri dans $\mathcal{R}'$ s'écrit, $(c = 1)$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}'\|^2 &= v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z \\ &= \frac{(v_x - v_e)^2 + \left(v_y^2 + v_z^2\right)/\gamma_e^2}{\left(1 - v_e v_x\right)^2} \end{aligned}$$

8.5.2 Transformation de Lorentz-Poincaré du trivecteur vélocité

Le trivecteur vélocité se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Les relations (8.7) p. 76 peuvent être mises sous forme vectorielle. Pour établir la transformation de Lorentz-Poincaré de la vélocité nous différentions la transformation de Lorentz sous forme intrinsèque (2.16) p. 27 $(c = 1)$ dans laquelle le vecteur vitesse relative $\vec{v}_e$ est constant :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e \left(dt - \vec{v}_e \cdot d\vec{r}\right) \\ d\vec{r}' = d\vec{r} + (\gamma_e - 1)\dfrac{\vec{v}_e \cdot d\vec{r}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e \vec{v}_e dt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r} + (\gamma_e - 1)\frac{\vec{v}_e \cdot d\vec{r}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e \vec{v}_e dt}{\gamma_e \left(dt - \vec{v}_e \cdot d\vec{r}\right)}$$

En divisant par dt le numérateur et le dénominateur $(c = 1)$:

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e \vec{v}_e}{\gamma_e \left(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e\right)}} \tag{8.8}$$

> Remarque 8.5.2. *Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer $\vec{v}'$, $\vec{v}$ et v_e par $\vec{v}'/c$, $\vec{v}/c$ et $\vec{v}_e/c$, puis simplifier.*

Pour inverser la relation, permutons $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et remplaçons $\vec{v}_e$ par $-\vec{v}_e$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}'\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e + \gamma_e \vec{v}_e}{\gamma_e \left(1 + \vec{v}'\cdot\vec{v}_e\right)}$$

8.5.3 Autre écriture vectorielle de la vélocité

Une autre forme vectorielle consiste à écrire le vecteur vitesse $\vec{v}$ comme la somme d'un vecteur $\vec{v}_{||}$ parallèle à $\vec{v}_e$, et d'un vecteur $\vec{v}_\perp$ perpendiculaire à $\vec{v}_e$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_\perp \qquad \text{et} \qquad \vec{v}' = \vec{v}'_{||} + \vec{v}'_\perp$$

Les relations (8.7) p. 76 s'écrivent sous forme vectorielle

$$\vec{v}'_{||} = \frac{\vec{v}_{||} - \vec{v}_e}{1 - v_e v_{||}} \qquad ; \qquad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\gamma_e\left(1 - v_e v_{||}\right)}$$

Lorsque $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}_e$, on a $\vec{v} = \vec{v}_{||}$ et $\vec{v}_{\perp} = \vec{0}$,

$$v' = \frac{v - v_e}{1 - v_e v} \qquad ; \qquad \vec{v}'_{\perp} = \vec{0}$$

Par symétrie, en échangeant les rôles de v' et v et en remplaçant $\vec{v}_e$ par $-\vec{v}_e$:

$$v = \frac{v' + v_e}{1 + v_e v'} \qquad ; \qquad \vec{v}'_{\perp} = \vec{0}$$

Nous retrouvons la loi de composition des vitesses (2.31) p. 35, dans laquelle w devient v et U devient v'.

Lorsque $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{v}_e$, c'est-à-dire lorsque $\vec{v} = \vec{v}_{\perp}$ et $\vec{v}_{||} = \vec{0}$:

$$\vec{v}'_{||} = -\vec{v}_e \qquad ; \qquad \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}/\gamma_e$$

Contrairement aux coordonnées perpendiculaires au mouvement qui restent identiques ($y = y', z = z'$), les composantes de la vitesse perpendiculaires au mouvement sont divisées par le facteur γ_e. On note qu'en mécanique non relativiste on aurait $\vec{v}'_{||} = -\vec{v}_e$ et $\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}$.

Le carré de la norme de la vélocité dans $\mathcal{R}'$ s'écrit ($c = 1$) :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}'\|^2 &= v'^2_{||} + v'^2_{\perp} \\ &= \frac{\left(\vec{v}_{||} - \vec{v}_e\right)^2 + v^2_{\perp}/\gamma^2_e}{\left(1 - v_e v_{||}\right)^2} \end{aligned}$$

8.6 Trivecteur vitesse propre

On ne peut définir la vitesse propre comme étant la vitesse dans le référentiel propre, car bien évidemment elle serait nulle. On peut cependant se servir du temps propre.

Définition 8.6.1. *Trivecteur vitesse propre $\vec{u}$*
La vitesse propre d'une particule d'épreuve dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est le vecteur dérivée du rayon vecteur $\vec{r}(t')$ de la particule d'épreuve dans $\mathcal{R}$ par le temps propre t' de la particule d'épreuve :

$$\vec{u}(t') \triangleq \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \tag{8.9}$$

La vitesse propre est aussi appelée *célérité*. Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\vec{u}\left(\frac{dx}{dt'}, \frac{dy}{dt'}, \frac{dz}{dt'}\right)$$

Exemple 8.6.1. *Trivecteur vitesse propre de Bob*

La vitesse propre ou célérité de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée du rayon vecteur de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ mesuré par Anna par le temps propre de Bob :

$$\vec{u}(t') \triangleq \frac{d\vec{r}(t')}{dt'}$$

Nous faisons le lien avec la vélocité (8.6) p. 75 grâce à la relation (3.3) p. 38 entre temps propre et temps impropre :

$$\vec{u} = \gamma_v \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u} = \gamma_v \vec{v}} \tag{8.10}$$

Remarque 8.6.1. *En mécanique non relativiste $\gamma_v = 1$, les trivecteurs vélocité et célérité sont confondus et appelés vecteur vitesse. La vélocité et la célérité ont un ancètre commun, la vitesse, qui n'est ni la vélocité ni la célérité car en mécanique non relativiste le temps n'est ni le temps propre ni le temps impropre. Ce sont des notions qui n'existent qu'en relativité.*

8.6.1 Transformation spéciale des composantes de la vitesse propre

La vitesse propre n'étant pas un quadrivecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le trivecteur lui-même.

Soit le nouvel observateur Henri de temps propre τ, de vitesse propre $\vec{u}$ et de vélocité $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, et de vitesse propre $\vec{u}'$ et de vélocité $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. Anna et Bob sont galiléens, leur vitesse d'entrainement est notée v_e. Différentions la transformation spéciale de Lorentz (2.15) p. 25 ($c = 1$) avec v_e constante :

$$\begin{cases} dt' = \gamma_e \left(dt - v_e dx\right) \\ dx' = \gamma_e \left(dx - v_e dt\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dx'}{d\tau} = \gamma_e \left(\dfrac{dx}{d\tau} - v_e \dfrac{dt}{d\tau}\right) \\ \dfrac{dy'}{d\tau} = \dfrac{dy}{d\tau} \\ \dfrac{dz'}{d\tau} = \dfrac{dz}{d\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_x = \gamma_e \left(u_x - v_e \gamma_v\right) & (8.11a) \\ u'_y = u_y & (8.11b) \\ u'_z = u_z & (8.11c) \end{cases}$$

La transformation spéciale de Lorentz de la vitesse propre permet de calculer la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ mesurée par Bob lorsque l'on connait la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}$ mesurée par Anna et la vitesse d'entrainement de Bob et Anna.

Remarque 8.6.2. *Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer u'_x, u_x et v_e par u'_x/c, u_x/c et v_e/c, puis simplifier.*

On obtient la transformation inverse en permutant les composantes et en remplaçant v_e par $-v_e$:

$$\begin{cases} u_x = \gamma_e\left(u'_x + v_e\gamma_v\right) \\ u_y = u'_y \\ u_z = u'_z \end{cases}$$

Le carré de la norme de la vitesse propre d'Henri dans $\mathcal{R}'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}'\|^2 &= u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z \\ &= \gamma_e^2(u_x - v_e\gamma_v)^2 + u_y^2 + u_z^2 \end{aligned}$$

8.6.2 Transformation de Lorentz-Poincaré du trivecteur vitesse propre

Le trivecteur vitesse propre se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Pour établir la transformation de Lorentz-Poincaré de la vitesse propre d'Henri lors du passage du référentiel d'Anna à celui de Bob, différentions la transformation de Lorentz sous forme intrinsèque (2.16b) p. 27 ($c = 1$), dans laquelle le vecteur vitesse relative $\vec{v}_e$ est constant :

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\gamma_e - 1)\frac{\vec{v}_e \cdot d\vec{r}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{r}'}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} + (\gamma_e - 1)\frac{\vec{v}_e \cdot \frac{d\vec{r}}{d\tau}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\,\frac{dt}{d\tau}$$

$$\boxed{\vec{u}' = \vec{u} + (\gamma_e - 1)\frac{\vec{v}_e \cdot \vec{u}}{v_e^2}\,\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\gamma_v}$$

Pour inverser la relation permutons $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et remplaçons $\vec{v}$ par $\vec{v}'$ et $\vec{v}_e$ par $-\vec{v}_e$:

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}' + (\gamma_e - 1)\frac{\vec{v}_e \cdot \vec{u}'}{v_e^2}\,\vec{v}_e + \gamma_e\vec{v}_e\gamma_{v'}}$$

8.7 Quadrivitesse

Le quadrivecteur position (déf. 8.3.2 p. 71) de Bob dans $\mathcal{R}$ est invariant par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que sa forme infinitésimale $d\boldsymbol{r}(cdt, d\vec{r})$ comme différence de deux quadrivecteurs. La durée propre infinitésimale dt' mesurée par Bob dans $\mathcal{R}'$ étant absolue, nous posons la définition suivante :

Définition 8.7.1. *Quadrivitesse* $\boldsymbol{u}$
La quadrivitesse de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, est le quadrivecteur dérivée du quadrivecteur position de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre de Bob :

$$\boldsymbol{u} \triangleq \frac{d\boldsymbol{r}}{dt'}$$

La quadrivitesse est aussi appelée quadrivecteur vitesse d'univers, vitesse spatio-temporelle, vitesse quadridimensionnelle ou encore 4-vitesse. Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, il a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &\triangleq \frac{d\boldsymbol{r}(ct,\vec{r})}{dt'} \\ &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt'}\left(\frac{cdt}{dt'},\frac{d\vec{r}}{dt'}\right) \\ &= \boldsymbol{u}\left(\frac{cdt}{dt'},\frac{d\vec{r}}{dt'}\right)\end{aligned}$$

Avec la relation (3.3) p. 38 entre temps propre et temps impropre

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}(c\gamma_v,\vec{u}) \\ &= \boldsymbol{u}(\gamma_v c,\gamma_v\vec{v})\end{aligned} \tag{8.12}$$

où $\vec{u}$ est le trivecteur vitesse propre de Bob dans $\mathcal{R}$, (8.9) p. 78, et $\vec{v}$ son trivecteur vélocité (8.6) p. 75.

La quadrivitesse généralise à l'espace-temps la vitesse propre (notion déjà relativiste) purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle $u_t = c\gamma_v$:

$$\boldsymbol{u}(u_t,u_x,u_y,u_z) = \boldsymbol{u}(c\gamma_v,u_x,u_y,u_z)$$

La trajectoire d'une particule d'épreuve dans l'espace-temps, c'est-à-dire sa ligne d'univers, ne sort jamais du cône de lumière d'un quelconque évènement appartenant à cette ligne d'univers, sinon sa vitesse serait supérieure à c. Par conséquent sa quadrivitesse, tangente à sa ligne d'univers, est un vecteur à quatre dimensions de genre temps.

8.7.1 Pseudo-norme de la quadrivitesse

Comme pour tout quadrivecteur, la quadri-norme de la quadrivitesse est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|^2 &= \gamma_v\,(c,\vec{v})\cdot\gamma_v\,(c,\vec{v}) \\ &= \gamma_v^2\left(c^2-v^2\right) \\ &= \gamma_v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2 \\ &= c^2\end{aligned} \tag{8.13}$$

Nous pouvons également trouver ce résultat en remarquant que lorsque la vitesse entre Anna et Bob tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque le référentiel propre d'Anna et celui de Bob sont confondus, $\gamma' = 1$ et $\vec{u} = \vec{0}$, la quadrivitesse de Bob n'est pas nulle :

$$\boldsymbol{u}'(c,\vec{0})$$

C'est la vitesse de Bob, pour Bob. Sa vitesse spatiale est nulle mais sa vitesse temporelle (composante temporelle de sa quadrivitesse) est non nulle, il se déplace dans le temps vers le futur à la vitesse limite. La quadri-norme de la quadrivitesse étant invariante :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\| &= \|\boldsymbol{u}'\| \\ &= c\end{aligned}$$

8.7.2 Quadri-produit scalaire avec le quadrivecteur position

Le quadri-produit scalaire du quadrivecteur position de Bob dans $\mathcal{R}$ et de sa quadrivitesse dans $\mathcal{R}$ est un invariant, avec (2.16a) p. 27 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\left(ct,\vec{r}\right)\cdot\boldsymbol{u}\left(\gamma_v c,\gamma_v\vec{v}\right) &= \gamma_v c^2 t-\gamma_v\vec{r}\cdot\vec{v}\\ &= \gamma_v\left(t-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)c^2\\ &= c^2 t'\end{aligned}$$

où t' est le temps propre de Bob. Dans le référentiel propre de Bob nous avons directement :

$$\boldsymbol{r}'\left(ct',\vec{0}\right)\cdot\boldsymbol{u}'\left(\gamma_{v'}c,\vec{0}\right)=c^2t'$$

car la nullité du trivecteur vélocité de Bob dans $\mathcal{R}'$, $\vec{v}'=\vec{0}$, entraine $\gamma_{v'}=1$.

8.7.3 Transformation spéciale des composantes de la quadrivitesse

La quadrivitesse étant un quadrivecteur, elle est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré mais ses composantes se transforment. Le lien entre les composantes de la quadrivitesse dans deux référentiels est donné par la transformation de Lorentz-Poincaré des coordonnées galiléennes (2.15) p. 25 ($c=1$).

Soient les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'Anna et Bob de vitesse relative v_e le long des axes x et x' confondus. Bob se déplace dans le sens des x croissants d'Anna. Soit l'observateur Henri de vélocité $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La quadrivitesse d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit ($c=1$) :

$$\boldsymbol{u}\begin{pmatrix}u_t\\u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}=\boldsymbol{u}'\begin{pmatrix}u'_t\\u'_x\\u'_y\\u'_z\end{pmatrix}\qquad\text{avec}\qquad\begin{cases}u'_t=\gamma_e(u_t-v_eu_x)\\u'_x=\gamma_e(u_x-v_eu_t)\\u'_y=u_y\\u'_z=u_z\end{cases}$$

En remplaçant u_t par γ_v on retrouve la transformation de la vitesse propre (8.11) p. 79. En notation indicielle :

$$\forall\mu=0,\ldots,3 u'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}u^{\nu}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}u'^0=\gamma_eu^0-\gamma_ev_eu^1\\u'^1=-\gamma_ev_eu^0+\gamma_eu^1\\u'^2=u^2\\u'^3=u^3\end{cases}$$

8.8 Triaccélération

Définition 8.8.1. *Triaccélération $\vec{a}$*
Le trivecteur accélération d'une particule d'épreuve dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est la dérivée du trivecteur vélocité (8.6) *p. 75 de cette particule d'épreuve dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps propre t d'Anna :*

$$\begin{aligned} \vec{a} &\triangleq \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &\triangleq \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\vec{a}\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

En mécanique non relativiste $\gamma_v = 1$, la vélocité est confondue avec la vitesse et la triaccélération est confondue avec l'accélération.

8.8.1 Transformation spéciale des composantes de la triaccélération

La triaccélération n'étant pas un quadrivecteur, ses composantes se transforment par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré ainsi que le trivecteur lui-même.

Soient les deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'Anna et Bob, et soit l'observateur Henri de vélocité $\vec{v}(t)$ dans $\mathcal{R}$ et de vélocité $\vec{v}'(t')$ dans $\mathcal{R}'$.

Pour la composante en x' de la triaccélération d'Henri dans $\mathcal{R}'$, à partir de (8.7a) p. 76 ($c = 1$) :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{dv'_x}{dt'} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x - v_e}{1 - v_e v_x}\right) \times \frac{dt}{dt'} \end{aligned}$$

À partir de la transformation de Lorentz-Poincaré du temps (2.15) p. 25 ($c = 1$), nous avons :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e\left(t - v_e x\right) \\ t = \gamma_e\left(t' + v_e x'\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dt'}{dt} = \gamma_e\left(1 - v_e v_x\right) \\ \dfrac{dt}{dt'} = \gamma_e\left(1 + v_e v'_x\right) \end{cases}$$

Utilisons l'inverse de la dérivée dt'/dt pour faire apparaitre v_x :

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x\left(1 - v_e v_x\right) - \left(v_x - v_e\right)\left(-v_e a_x\right)}{\left(1 - v_e v_x\right)^2} \times \frac{1}{\gamma_e\left(1 - v_e v_x\right)} \\ &= \frac{a_x\left(1 - v_e^2\right)}{\gamma_e\left(1 - v_e v_x\right)^3} \\ &= \frac{a_x}{\gamma_e^3\left(1 - v_e v_x\right)^3} \end{aligned}$$

Pour la composante selon l'axe des y, à partir de (8.7b) p. 76 :

$$\begin{aligned}
a'_y &= \frac{dv'_y}{dt'} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{v_y}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)}\right] \times \frac{dt}{dt'} \\
&= \frac{a_y \gamma_e\left(1-v_e v_x\right) + v_y \gamma_e v_e a_x}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^2} \times \frac{1}{\gamma_e\left(1-v_e v_x\right)} \\
&= \frac{a_y + v_e\left(a_x v_y - a_y v_x\right)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3}
\end{aligned}$$

Nous raisonnons par symétrie pour l'axe des z. La transformation spéciale de Lorentz de la triaccélération d'Henri s'écrit ($c = 1$) :

$$\begin{cases}
a'_x = \dfrac{a_x}{\gamma_e^3\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(8.14a)} \\[2ex]
a'_y = \dfrac{a_y + v_e\left(a_x v_y - a_y v_x\right)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(8.14b)} \\[2ex]
a'_z = \dfrac{a_z + v_e\left(a_x v_z - a_z v_x\right)}{\gamma_e^2\left(1-v_e v_x\right)^3} & \text{(8.14c)}
\end{cases}$$

Elle permet de calculer les composantes de la triaccélération $\vec{a}'$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob lorsque l'on connait les composantes de la triaccélération $\vec{a}$ d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna.

Remarque 8.8.1. *Pour retrouver les formules avec* $c = 299\ 792\ 458$ m/s, *remplacer* a'_x, a'_y, a'_z, a_x, a_y, a_z, v_x, v_y, v_z *et* v_e *par* a'_x/c^2, a'_y/c^2, a'_z/c^2, a_x/c^2, a_y/c^2, a_z/c^2, v_x/c, v_y/c, v_z/c *et* v_e/c, *puis simplifier.*

On obtient la transformation inverse en permutant les composantes entre référentiels et en changeant v_e en $-v_e$:

$$\begin{cases}
a_x = \dfrac{a'_x}{\gamma_e^3\left(1+v_e v'_x\right)^3} \\[2ex]
a_y = \dfrac{a'_y - v_e\left(a'_x v'_y - a'_y v'_x\right)}{\gamma_e^2\left(1+v_e v'_x\right)^3} \\[2ex]
a_z = \dfrac{a'_z - v_e\left(a'_x v'_z - a'_z v'_x\right)}{\gamma_e^2\left(1+v_e v'_x\right)^3}
\end{cases}$$

8.8.2 Transformation de Lorentz-Poincaré de la triaccélération

Le trivecteur accélération se transforme par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré. Dérivons par rapport au temps propre d'Anna la transformation de Lorentz-Poincaré de la vélocité (8.8) p. 77 ($c = 1$) :

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + \left(\gamma_e - 1\right)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e \vec{v}_e}{\gamma_e\left(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e\right)}$$

Soient les fonctions U et W telles que :

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \frac{U}{W} \\
d\vec{v}' &= \frac{dUW - UdW}{W^2} \\
\frac{d\vec{v}'}{dt'} &= \frac{dU}{Wdt'} - \frac{UdW}{W^2dt'}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} U = \vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e \\ W = \gamma_e\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dU = d\vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\dfrac{d\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e \\ dW = -\gamma_e(d\vec{v}\cdot\vec{v}_e) \end{cases}$$

En différentiant (2.16a) p. 27 ($c = 1$) :

$$dt' = \gamma_e\,(dt - \vec{v}_e\cdot d\vec{r})$$

Pour le premier terme :

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{W} &= \frac{d\vec{v}}{\gamma_e\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)} + \frac{(\gamma_e - 1)(d\vec{v}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)} \\
\frac{dU}{Wdt'} &= \frac{d\vec{v}}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)\,(dt - \vec{v}_e\cdot d\vec{r})} + \frac{(\gamma_e - 1)(d\vec{v}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)\,(dt - \vec{v}_e\cdot d\vec{r})} \\
&= \frac{\vec{a}}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2}
\end{aligned}$$

Pour le second terme :

$$\begin{aligned}
\frac{UdW}{W^2} &= \frac{-\left[\vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\right](d\vec{v}\cdot\vec{v}_e)}{\gamma_e\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2} \\
\frac{UdW}{W^2dt'} &= \frac{-\left[\vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\right](d\vec{v}\cdot\vec{v}_e)}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2\,(dt - \vec{v}_e\cdot d\vec{r})} \\
&= \frac{-\left[\vec{v} + (\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\right](\vec{a}\cdot\vec{v}_e)}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3} \\
&= -\frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)\vec{v}_e - \gamma_e\vec{v}_e\right](\vec{a}\cdot\vec{v}_e)}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}
\end{aligned}$$

En soustrayant le second terme du premier :

$$\frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{\vec{a}}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2} + \frac{(\gamma_e - 1)(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2} + \frac{\left[(\gamma_e - 1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right) - \gamma_e\right](\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}}{\gamma_e^2\,(1 - \vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}$$

Les termes centraux donnent :

$$\begin{aligned}
&\frac{(\gamma_e-1)\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)\,(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}+\frac{\left[(\gamma_e-1)\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}_e}{v_e^2}\right)-\gamma_e\right]v_e^2(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}\\
&=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}\left[(\gamma_e-1)\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)+(\gamma_e-1)\,(\vec{v}\cdot\vec{v}_e)-\gamma_e v_e^2\right]\\
&=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}\left(\gamma_e-1-\gamma_e v_e^2\right)\\
&=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}\left[\gamma_e\left(1-v_e^2\right)-1\right]\\
&=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}\,\frac{(1-\gamma_e)}{\gamma_e}
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors la transformation de Lorentz-Poincaré de la triaccélération ($c=1$),

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}}{\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^2}-\frac{(\gamma_e-1)(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^3\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3}+\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v}_e)\vec{v}}{\gamma_e^2\,(1-\vec{v}\cdot\vec{v}_e)^3} \tag{8.15}$$

et la relation inverse en permutant $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ et en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{v}'$ et $\vec{v}_e$ par $-\vec{v}_e$:

$$\vec{a}=\frac{\vec{a}'}{\gamma_e^2\,(1+\vec{v}_e\cdot\vec{v}')^2}-\frac{(\gamma_e-1)(\vec{a}'\cdot\vec{v}_e)\vec{v}_e}{v_e^2\gamma_e^3\,(1+\vec{v}_e\cdot\vec{v}')^3}-\frac{(\vec{a}'\cdot\vec{v}_e)\vec{v}'}{\gamma_e^2\,(1+\vec{v}_e\cdot\vec{v}')^3}$$

8.8.3 Autre écriture vectorielle de la triaccélération

Nous pouvons écrire le trivecteur accélération $\vec{a}$ comme étant la somme d'un vecteur $\vec{a}_{||}$ parallèle à $\vec{v}_e$, et d'un vecteur $\vec{a}_\perp$ perpendiculaire à $\vec{v}_e$:

$$\vec{a}=\vec{a}_{||}+\vec{a}_\perp \qquad \text{et} \qquad \vec{a}'=\vec{a}'_{||}+\vec{a}'_\perp$$

Les relations de transformation (8.14) p. 84 deviennent ($c=1$) :

$$\vec{a}'_{||}=\frac{\vec{a}_{||}}{\gamma_e^3\,(1-\vec{v}_e\cdot\vec{v})^3} \qquad ; \qquad \vec{a}'_\perp=\frac{\vec{a}_\perp+\vec{v}_e\times(\vec{v}\times\vec{a})}{\gamma_e^2\,(1-\vec{v}_e\cdot\vec{v})^3}$$

Lorsque $\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{v}_e$, c'est-à-dire lorsque $\vec{a}=\vec{a}_{||}$ et $\vec{a}_\perp=\vec{0}$:

$$\vec{a}'_{||}=\frac{\vec{a}}{\gamma_e^3\,(1-\vec{v}_e\cdot\vec{v})^3} \qquad ; \qquad \vec{a}'_\perp=\frac{\vec{v}_e\times(\vec{v}\times\vec{a})}{\gamma_e^2\,(1-\vec{v}_e\cdot\vec{v})^3}$$

Lorsque $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{v}_e$, c'est-à-dire lorsque $\vec{a}=\vec{a}_\perp$ et $\vec{a}_{||}=\vec{0}$:

$$\vec{a}'_{||}=\vec{0} \qquad ; \qquad \vec{a}'_\perp=\frac{\vec{a}+\vec{v}_e\times(\vec{v}\times\vec{a})}{\gamma_e^2\,(1-\vec{v}_e\cdot\vec{v})^3}$$

8.9 Trivecteur accélération propre

L'accélération propre de Bob est celle qu'il mesure avec son accéléromètre. Contrairement aux notions cinématiques que nous avons vu, celle-ci est liée à un unique instrument de mesure physique, ne faisant pas intervenir l'espace et le temps. L'accélération propre de Bob est nulle si Bob est galiléen. L'accélération propre n'est pas invariante par changement de référentiel puisqu'elle n'est définie que dans un seul référentiel, celui de l'accéléromètre. Elle est *absolue* car tous les observateurs s'accordent sur sa valeur, mesurée par Bob. Elle est donc primordiale, les autres notions s'en déduisent.

Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel propre de Bob, et soit t' son temps propre. Bob veut mesurer son accélération propre instantanée, c'est-à-dire son accélération propre à un instant t' donné, $\vec{\mathrm{a}}(t')$. Supposons qu'à l'instant t', le référentiel de Bob croise le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna. Elle mesure la distance que Bob parcourt dans $\mathcal{R}$ en une durée dt' juste avant qu'ils ne se croisent, puis celle qu'il parcourt en une durée dt' juste après qu'ils se soient croisés. Bob en déduit sa variation de vitesse propre dans $\mathcal{R}$ en une durée dt', c'est-à-dire son accélération propre.

DÉFINITION 8.9.1. *Trivecteur accélération propre* $\vec{\mathrm{a}}$
L'accélération propre d'une particule d'épreuve est la dérivée de sa vitesse propre dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ (8.9) *p. 78 par rapport à son temps propre :*

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{a}}(t') &\triangleq \frac{d\vec{\mathrm{u}}(t')}{dt'}\\ &\triangleq \frac{d^2\vec{\mathrm{r}}(t')}{dt'^2}\end{aligned}$$

8.9.1 Lien entre trivecteur accélération propre et triaccélération

Faisons apparaitre la vélocité de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna, relation (8.10) p. 79 :

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{a}}(t') &= \frac{d(\gamma_v\vec{v})}{dt'}\\ &= \gamma_v\frac{d\vec{v}}{dt'} + \vec{v}\,\frac{d\gamma_v}{dt'}\end{aligned}$$

Dérivons le facteur relativiste par rapport au temps propre t'

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_v}{dt'} &= \frac{d}{dt'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\\ &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \times -\frac{1}{c^2}\,\frac{dv^2}{dt'}\\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\,\frac{d}{dt'}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\\ &= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\left(2v_x\frac{dv_x}{dt'}+2v_y\frac{dv_y}{dt'}+2v_z\frac{dv_z}{dt'}\right)\\ &= \frac{\gamma_v^3}{c^2}\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt'}\\ &= \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\cdot\vec{a} \qquad (8.16)\end{aligned}$$

Remarque 8.9.1. *Si l'on prend $c = 1$ cette relation s'écrit :*

$$\frac{d\gamma_v}{dt'} = \gamma_v^4 \vec{v} \cdot \vec{a}$$

Pour retrouver la relation avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplaçons t' par ct', $\vec{v}$ par $\vec{v}/c$ et $\vec{a}$ par $\vec{a}/c^2$:

$$\frac{d\gamma_v}{cdt'} = \gamma_v^4 \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{a}}{c^2}$$
$$\frac{d\gamma_v}{dt'} = \frac{\gamma_v^4}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}$$

Remarque 8.9.2. *On fera attention à ce qui suit. Nous avons d'une part,*

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d\vec{v}}{dt}\right\| &= \|\vec{a}\| \\
&= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\
&= \left[\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Par conséquent si l'on note $v = \|\vec{v}\|$ et $a = \|\vec{a}\|$ on a :

$$\frac{dv}{dt} \neq a$$

$$\vec{\mathrm{a}} = \gamma_v^2 \vec{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2} \vec{v}\,(\vec{v} \cdot \vec{a}) \tag{8.17}$$

Cette relation permet le calcul du trivecteur accélération propre de Bob à partir de son trivecteur vélocité instantanée dans $\mathcal{R}$ et de son trivecteur accélération dans $\mathcal{R}$.

8.9.2 Transformation spéciale des composantes de l'accélération propre

Reprenons la transformation spéciale de Lorentz de la triaccélération (8.14) p. 84. Supposons qu'à l'instant $\tau_0 = t_0$, et seulement à cet instant, Henri ait même vecteur vélocité qu'Anna dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{v}' \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma_e = \gamma_{v'}$$

La vélocité d'Henri est momentanément nulle dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si bien que l'on a :

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{a_x}{\gamma_{v'}^3} \\ a'_y = \dfrac{a_y}{\gamma_{v'}^2} \\ a'_z = \dfrac{a_z}{\gamma_{v'}^2} \end{cases}$$

L'accélération propre d'Henri $\vec{\mathrm{a}}$ est confondue avec sa triaccélération $\vec{a}$ dans $\mathcal{R}$, car les temps propres d'Anna et Henri sont égaux pendant une durée infinitésimale (ils ont même vecteur vitesse) :

$$\begin{cases} a'_x = \dfrac{\mathrm{a}_x}{\gamma_{v'}^3} & (8.18\text{a}) \\ a'_y = \dfrac{\mathrm{a}_y}{\gamma_{v'}^2} & (8.18\text{b}) \\ a'_z = \dfrac{\mathrm{a}_z}{\gamma_{v'}^2} & (8.18\text{c}) \end{cases}$$

Ces relations permettent de calculer la triaccélération d'Henri dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de Bob, à partir de l'accélération propre d'Henri. Réciproquement :

$$\begin{cases} \mathrm{a}_x = a'_x \gamma_e^3 \\ \mathrm{a}_y = a'_y \gamma_e^2 \\ \mathrm{a}_z = a'_z \gamma_e^2 \end{cases}$$

8.10 Quadriaccélération

Définition 8.10.1. *Quadriaccélération* $\mathbf{a}$
La quadriaccélération de Bob dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ d'Anna est le quadrivecteur dérivée de la quadrivitesse de Bob dans $\mathcal{R}$ par rapport à son temps propre :

$$\mathbf{a} \triangleq \frac{d\boldsymbol{u}}{dt'}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites de $\mathcal{R}$, il a pour composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\boldsymbol{u}\,(c\gamma_v, \vec{u})}{dt'} \\ &= \frac{d\boldsymbol{u}}{dt'}\left(c\,\frac{d\gamma_v}{dt'}, \vec{\mathrm{a}}\right) \\ &= \mathbf{a}\left(c\,\frac{d\gamma_v}{dt'}, \vec{\mathrm{a}}\right) \end{aligned}$$

La quadriaccélération généralise à l'espace-temps l'accélération propre (notion déjà relativiste) purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle $\mathrm{a}^0 = c d\gamma_v/dt'$:

$$\mathbf{a}(\mathrm{a}_t, \mathrm{a}_x, \mathrm{a}_y, \mathrm{a}_z) = \mathbf{a}(\mathrm{a}^0, \mathrm{a}^1, \mathrm{a}^2, \mathrm{a}^3)$$

Une rotation classique purement spatiale du trivecteur vitesse propre ne fait varier que les composantes spatiales de la quadriaccélération, car la composante temporelle n'est fonction que de la norme du trivecteur vitesse propre par l'intermédiaire du facteur relativiste γ_v. La seule autre rotation possible, la rotation hyperbolique entre temps et espace (le changement de référentiel par la transformation de Lorentz), fait donc varier la composante temporelle et par conséquent également au moins l'une des composantes spatiales car la quadri-norme de la quadriaccélération est invariante. Une accélération en norme est donc une rotation hyperbolique dans l'espace-temps, alors qu'une accélération par changement de direction est une rotation purement spatiale.

Grâce aux relations (8.16) p. 87 et (8.17) p. 88, nous trouvons l'expression de la quadriaccélération de Bob dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'Anna,

$$\mathbf{a}\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a},\ \gamma_v^2\vec{a}+\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right)$$

où $\vec{v}$ est le trivecteur vélocité instantanée de Bob dans $\mathcal{R}$ et $\vec{a}$ est son trivecteur accélération dans $\mathcal{R}$. La quadriaccélération de Bob dans $\mathcal{R}$ a pour composantes contravariantes ($c=1$) :

$$\mathbf{a}\begin{pmatrix}\mathrm{a}^0\\ \mathrm{a}^1\\ \mathrm{a}^2\\ \mathrm{a}^3\end{pmatrix}=\mathbf{a}\begin{pmatrix}\gamma_v^4\vec{v}\cdot\vec{a}\\ \gamma_v^2a_x+\gamma_v^4v_x\vec{v}\cdot\vec{a}\\ \gamma_v^2a_y+\gamma_v^4v_y\vec{v}\cdot\vec{a}\\ \gamma_v^2a_z+\gamma_v^4v_z\vec{v}\cdot\vec{a}\end{pmatrix}\tag{8.19}$$

Utilisons la relation de calcul vectoriel suivante :

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})\\ \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C})&=\vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{A}^2\vec{C}\\ \vec{A}(\vec{A}\cdot\vec{C})&=\vec{A}^2\vec{C}+\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{C})\\ \vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})&=v^2\vec{a}+\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a},\ \gamma_v^2\vec{a}+\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right)&=\mathbf{a}\left(\gamma_v^4\,\vec{v}\cdot\vec{a},\ \gamma_v^2\vec{a}+\gamma_v^4v^2\vec{a}+\gamma_v^4\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{a})\right)\\ &=\mathbf{a}\left(\gamma_v^4\,\vec{v}\cdot\vec{a},\ \vec{a}\left(\gamma_v^2+\gamma_v^4v^2\right)+\gamma_v^4\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{a})\right)\end{aligned}$$

À partir de la définition 2.1.3 p. 24 du facteur de Lorentz, avec $c=1$:

$$\begin{aligned}\gamma^2&=\frac{1}{1-v^2}\\ \gamma^2-\gamma^2v^2&=1\\ \gamma^2&=1+\gamma^2v^2\end{aligned}$$

si bien que

$$\mathbf{a}\left(\gamma_v^4\vec{v}\cdot\vec{a},\ \gamma_v^4\vec{a}+\gamma_v^4\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{a})\right)$$

Remarque 8.10.1. *Pour retrouver les formules avec* $c = 299\ 792\ 458$ m/s, *remplacer* $\vec{a}$ *et* $\vec{v}$ *par* $\vec{a}/c^2$ *et* $\vec{v}/c$, *puis simplifier.*

Dans le référentiel propre $\mathcal{R}'$ de Bob, $\gamma_v=1$ et $\vec{v}=\vec{0}$, la quadriaccélération de Bob a pour composantes :

$$\mathbf{a}'(0,\vec{a}')\tag{8.20}$$

Un observateur suit une géodésique d'un espace métrique à n dimensions ssi sa n-accélération est nulle. Par exemple dans l'espace-temps sa quadriaccélération doit être nulle. D'après la relation (8.20), cela est vrai ssi son accélération propre est nulle, autrement dit ssi les accéléromètres de l'observateur indiquent tous zéro.

8.10.1 Pseudo-norme de la quadriaccélération

La quadri-norme de la quadriaccélération est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2 &= \mathbf{a}\left(0, \vec{a}\right) \cdot \mathbf{a}\left(0, \vec{a}\right) \\ &= -a^2\end{aligned}$$

8.10.2 Quadri-produit scalaire avec la quadrivitesse

Le quadri-produit scalaire des quadrivecteurs vitesse et accélération est un invariant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\left(\gamma_v c, \gamma_v \vec{v}\right) \cdot \mathbf{a}\left(\frac{\gamma_v^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a}, \gamma_v^2\vec{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\vec{a}\right)\right) &= \gamma_v^5\vec{v}\cdot\vec{a} - \gamma_v\vec{v}\cdot\left(\gamma_v^2\vec{a} + \gamma_v^4\vec{v}\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right) \\ &= \gamma_v^5\vec{v}\cdot\vec{a} - \gamma_v^3\vec{v}\cdot\vec{a} - \gamma_v^5 v^2\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} \\ &= \gamma_v^5\vec{v}\cdot\vec{a}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \gamma_v^3\vec{v}\cdot\vec{a} \\ &= 0\end{aligned}$$

Directement en se plaçant dans le référentiel propre :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'\left(c, \vec{0}\right) \cdot \mathbf{a}'\left(0, \vec{a}\right) &= c \times 0 - \vec{0}\cdot\vec{a} \\ &= 0\end{aligned}$$

Les quadrivecteurs vitesse et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du quadri-produit scalaire (8.4) p. 74. Par suite, la quadriaccélération est aussi pseudo-orthogonale à la ligne d'univers. C'est un vecteur à quatre dimensions de direction du genre espace. On arrive au même résultat en dérivant par rapport au temps propre le carré de la quadri-norme de la quadrivitesse (8.13) p. 81. Le carré de la norme d'un vecteur étant le produit scalaire de ce vecteur avec lui-même, on se sert de l'expression du produit scalaire (7.3) p. 66 :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt'}\left(g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right) &= \frac{dc^2}{dt'} \\ g_{\mu\nu}\left(u^\mu\,\frac{du^\nu}{dt'} + u^\nu\,\frac{du^\mu}{dt'}\right) &= 0 \\ 2g_{\mu\nu}\left(u^\mu\,\frac{du^\nu}{dt'}\right) &= 0 \\ g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu &= 0\end{aligned}$$

8.10.3 Quadri-produit scalaire avec le quadrivecteur position

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'\left(ct', \vec{0}\right) \cdot \mathbf{a}'\left(0, \vec{a}\right) &= ct' \times 0 - \vec{0}\cdot\vec{a} \\ &= 0\end{aligned}$$

Les quadrivecteurs position et accélération sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps, au sens du quadri-produit scalaire (8.4) p. 74.

8.10.4 Transformation spéciale des composantes de la quadriaccélération

La quadriaccélération étant un quadrivecteur, seules ses composantes se transforment par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Soient les deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'Anna et Bob, en configuration standard, de vitesse relative v_e. Soit l'observateur Henri de vélocité $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ et $\vec{v}'$ dans $\mathcal{R}'$. La quadriaccélération d'Henri étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit ($c = 1$) :

$$\mathbf{a}\begin{pmatrix}\mathrm{a}_t\\ \mathrm{a}_x\\ \mathrm{a}_y\\ \mathrm{a}_z\end{pmatrix} = \mathbf{a}'\begin{pmatrix}\mathrm{a}'_t\\ \mathrm{a}'_x\\ \mathrm{a}'_y\\ \mathrm{a}'_z\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases}\mathrm{a}'_t = \gamma_e(\mathrm{a}_t - v_e\mathrm{a}_x)\\ \mathrm{a}'_x = \gamma_e(\mathrm{a}_x - v_e\mathrm{a}_t)\\ \mathrm{a}'_y = \mathrm{a}_y\\ \mathrm{a}'_z = \mathrm{a}_z\end{cases}$$

où les composantes de la quadriaccélération dans $\mathcal{R}$ sont données par (8.19) p. 90. En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 \mathrm{a}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\mathrm{a}^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\mathrm{a}'^0 = \gamma_e\mathrm{a}^0 - \gamma_e v_e\mathrm{a}^1\\ \mathrm{a}'^1 = -\gamma_e v_e\mathrm{a}^0 + \gamma_e\mathrm{a}^1\\ \mathrm{a}'^2 = \mathrm{a}^2\\ \mathrm{a}'^3 = \mathrm{a}^3\end{cases}$$

8.11 Exemple d'un vaisseau spatial quittant la Terre

À bord d'un vaisseau spatial, Bob quitte Anna restée sur la Terre, d'un mouvement rectiligne accéléré. À partir de l'instant initial t_0, l'accéléromètre à bord indique que l'accélération propre a est constante. La norme de la vélocité du vaisseau dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen est notée v. La relation (8.18a) p. 89 selon l'axe du mouvement en x donne,

$$a = \frac{\mathrm{a}}{\gamma_v^3}$$

et montre que l'accélération a du vaisseau mesurée sur Terre par Anna tend vers zéro lorsque sa vitesse croit. C'est une condition nécessaire pour qu'il ne dépasse pas la vitesse limite c. Cherchons la vitesse du vaisseau mesurée sur Terre par Anna en fonction de la durée T écoulée sur Terre :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= a\\ &= \mathrm{a}\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}\\ \int_0^{v(T)} \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} &= \int_0^T \mathrm{a}\, dt\end{aligned}$$

Pour intégrer on utilise

$$\begin{aligned}\beta_v &= v/c\\ c d\beta_v &= dv\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\beta_v(T)} \frac{d\beta_v}{(1-\beta_v^2)^{3/2}} &= \frac{\mathrm{a}}{c}\int_0^T dt \\
\frac{\beta_v}{(1-\beta_v^2)^{1/2}} &= \frac{\mathrm{a}}{c}T \\
\frac{\beta_v^2}{1-\beta_v^2} &= \left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2 \\
\beta_v^2 &= \left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2 - \left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\beta_v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_v^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\right] &= \left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2 \\
\beta_v^2 &= \left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1} \qquad (8.21)\\
v^2 &= \mathrm{a}^2T^2\left[1+\left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v(T) = \mathrm{a}T\left[1+\left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 T^2\right]^{-1/2}}$$

Calculons la distance parcourue dans le référentiel terrestre en fonction du temps terrestre :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{x}}{dt} &= v \\
\int_0^{\mathrm{X}(T)} d\mathrm{x} &= \mathrm{a}\int_0^T t\left[1+\left(\frac{\mathrm{a}}{c}\right)^2 t^2\right]^{-1/2} dt
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable :

$$\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{a}^2t^2/c^2 \\
d\theta/dt &= 2\mathrm{a}^2t/c^2 \\
c^2d\theta/(2\mathrm{a}) &= \mathrm{a}t dt
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(T) &= \frac{c^2}{2\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{a}^2T^2/c^2}(1+\theta)^{-1/2}\,d\theta \\
&= \frac{c^2}{\mathrm{a}}\left[\sqrt{1+\theta}\right]_0^{\mathrm{a}^2T^2/c^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{X}(T) = \frac{c^2}{\mathrm{a}}\left(\sqrt{1+\frac{\mathrm{a}^2T^2}{c^2}}-1\right)} \qquad (8.22)$$

Inversons cette relation pour avoir la durée en fonction de la distance parcourue :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{a}}{c^2}\,\mathrm{X}+1 &= \sqrt{1+\frac{\mathrm{a}^2T^2}{c^2}}\\ \left(\frac{\mathrm{a}}{c^2}\,\mathrm{X}+1\right)^2-1 &= \frac{\mathrm{a}^2T^2}{c^2}\\ T &= \frac{c}{\mathrm{a}}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{a}}{c^2}\,\mathrm{X}+1\right)^2-1}\\ &= \frac{c}{\mathrm{a}}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{a}}{c^2}\right)^2\mathrm{X}^2+\frac{2\mathrm{a}}{c^2}\mathrm{X}}\end{aligned}$$

$$\boxed{T=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{X}}{c}\right)^2+\frac{2\mathrm{X}}{\mathrm{a}}}}$$

Comparons l'écoulement du temps sur Terre à celui à bord du vaisseau :

$$\begin{aligned}dt' &= dt/\gamma_v\\ \int_0^{T'} dt' &= \int_0^{T}\left(1-\beta_v^2\right)^{1/2}dt\end{aligned}$$

Avec (8.21) p. 93 :

$$\begin{aligned}\beta_v^2 &= \frac{\mathrm{a}^2t^2/c^2}{1+\mathrm{a}^2t^2/c^2}\\ \left(1-\beta_v^2\right)^{1/2} &= \left(1-\frac{\mathrm{a}^2t^2/c^2}{1+\mathrm{a}^2t^2/c^2}\right)^{1/2}\\ &= \left(1+\mathrm{a}^2t^2/c^2\right)^{-1/2}\end{aligned}$$

D'où

$$T'=\int_0^{T}\left(1+\mathrm{a}^2t^2/c^2\right)^{-1/2}dt$$

On pose

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathrm{a}t/c\\ d\Phi &= \mathrm{a}dt/c\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}T' &= \frac{c}{\mathrm{a}}\int_0^{\mathrm{a}T/c}\left(1+\Phi^2\right)^{-1/2}d\Phi\\ &= \frac{c}{\mathrm{a}}\Big[\operatorname{arg\,sinh}\Phi\Big]_0^{\mathrm{a}T/c}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{a}T'}{c}=\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{\mathrm{a}T}{c}\right)}$$

Réciproquement :

$$\boxed{\frac{\mathrm{a}T}{c}=\sinh\left(\frac{\mathrm{a}T'}{c}\right)}$$

Exprimons la distance parcourue en fonction du temps propre. À partir de (8.22) p. 93 :

$$\mathrm{X}(T) = \frac{c^2}{\mathrm{a}}\left(\sqrt{1+(\mathrm{a}/c)^2T^2}-1\right)$$
$$\mathrm{X}(T') = \frac{c^2}{\mathrm{a}}\left(\sqrt{1+\sinh^2(\mathrm{a}T'/c)}-1\right)$$

$$\boxed{\mathrm{X}(T') = \frac{c^2}{\mathrm{a}}\left[\cosh\left(\frac{\mathrm{a}T'}{c}\right)-1\right]}$$

Inversons cette relation :

$$\frac{\mathrm{a}}{c^2}\,\mathrm{X}+1 = \cosh\left(\frac{\mathrm{a}T'}{c}\right)$$

$$\boxed{T' = \frac{c}{\mathrm{a}}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{\mathrm{a}}{c^2}\,\mathrm{X}+1\right)}$$

L'accélération propre a un caractère absolu. Si on l'intègre par rapport au temps propre du vaisseau on obtient la norme de la vitesse propre indiqué en fonction du temps propre par les instruments de bord du vaisseau :

$$\begin{aligned} u(T') &= \int_0^{T'} \mathrm{a}dt' \\ &= \mathrm{a}T' \end{aligned}$$

Nous pouvons l'exprimer en fonction de la vélocité $v(T)$ mesurée dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned} \mathrm{a}T' &= \int_0^{T'} \mathrm{a}dt' \\ &= \int_0^{T'} \gamma_v^3 adt' \end{aligned}$$

La relation entre temps propre t à bord du vaisseau et temps impropre t' sur Terre donne :

$$\begin{aligned} dt &= \gamma_v(t)dt' \\ T &= \int \gamma_v(t)dt' \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} \mathrm{a}T' &= \int_0^{T} \gamma_v^2 adt \\ u(T') &= \int_0^{v(T)} \frac{dv}{1-v^2/c^2} \\ &= c\left[\operatorname{arg\,tanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right]_0^{v(T)} \\ &= c\operatorname{arg\,tanh}\left[\frac{v(T)}{c}\right] \\ &= c\operatorname{arg\,tanh}\left[\beta_v(T)\right] \end{aligned}$$

Avec la définition 4.3 p. 52 de la rapidité φ :

$$\boxed{u(T') = c\varphi} \tag{8.23}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}T' &= c\varphi \\
\mathrm{a} &= c\varphi/T' \\
\mathrm{a}(t') &= c\,\frac{d\varphi}{dt'}
\end{aligned}
$$

L'accélération propre est donc, au facteur c près, la variation de rapidité en fonction du temps propre. Inversons (8.23) :

$$
\boxed{v(T) = c\tanh\left[\frac{u(T')}{c}\right]}
$$

9 Dynamique relativiste

9.1 Inertie-énergie-impulsion

9.1.1 Masse inerte et masse grave

La masse inerte et la masse grave sont des coefficients que l'on associe à la quantité de matière contenue dans un corps. La masse grave ou masse pesante ou encore charge gravitationnelle se mesure avec une balance, par exemple par comparaison directe grâce à une balance de Roberval, ou par comparaison indirecte grâce à une balance piezoélectrique, ou un dynamomètre. Ces deux derniers instruments de mesure donnent le poids du corps qui dépend de l'endroit sur Terre où l'on se trouve. En revanche, le rapport des poids de deux corps, directement donné par la balance de Roberval, est indépendant du lieu et des autres conditions extérieures. Pour que la masse grave soit un coefficient intrinsèque au corps, autrement dit pour qu'il ne dépende pas des conditions extérieures mais seulement du corps considéré, nous définissons le rapport des masses de deux corps comme égal au rapport de leurs poids lorsqu'ils sont pesés au même endroit. On désigne alors un corps de référence qui aura une masse grave unité, avec lequel les masses graves des autres corps sont comparées.

La masse inerte est un coefficient qui traduit la résistance d'un corps à la modification de son état de mouvement. On peut la mesurer par comparaison directe en désignant un corps de référence de masse inerte unité, avec laquelle les masses inertes d'autres corps sont comparées par interaction (par exemple par choc). On peut aussi la mesurer par comparaison indirecte, en passant par une valeur intermédiaire. On attache un corps à un dynamomètre grâce à une corde et l'on fait tourner l'ensemble dans le plan horizontal. Le dynamomètre mesure la force centrifuge qui dépend de la masse inerte. À vitesse angulaire et longueur de corde fixes, on compare les masses inertes des différents corps grâce aux valeurs affichées sur le dynamomètre.

9.1.2 Impulsion relativiste

En mécanique non relativiste nous n'avons pas de certitude sur l'invariance de la masse inerte par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré car nous ne savons pas si elle est fonction de la vitesse[1]. En revanche la masse inerte d'un système mesurée dans le référentiel propre de ce système, notée simplement m (parfois m_0) ne peut être qu'*absolue*. Elle est appelée *masse propre*, *masse intrinsèque*, *masse au repos* ou simplement

1. Voir mécanique classique

masse. La masse d'un système est donc par définition mesurée dans le référentiel propre de ce système.

DÉFINITION 9.1.1. *Inertie I*
L'inertie d'un système de vélocité $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est le produit de la masse propre de ce système par le facteur relativiste lié à sa vélocité :

$$I(v) \triangleq \gamma_v m$$

DÉFINITION 9.1.2. *Quantité de mouvement relativiste $\vec{p}$*
Le trivecteur quantité de mouvement relativiste ou impulsion relativiste est le produit :

$$\begin{aligned} \vec{p} &\triangleq \gamma_v m\vec{v} \qquad (9.1) \\ &\triangleq I\vec{v} \\ &\triangleq m\vec{u} \end{aligned}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées rectangulaires (x, y, z), il a pour composantes contravariantes :

$$\vec{p}(mu_x, mu_y, mu_z) = \vec{p}\left(m\,\frac{dx}{dt'}, m\,\frac{dy}{dt'}, m\,\frac{dz}{dt'}\right)$$

REMARQUE 9.1.1. *À faible vitesse devant c ou lorsque c tend vers l'infini, $m\vec{u}$ tend vers $m\vec{v}$, le trivecteur quantité de mouvement non relativiste.*

DÉFINITION 9.1.3. *Quadri-impulsion $\boldsymbol{p}$*
La quadri-impulsion d'un système dans $\mathcal{R}$ est le produit de sa masse (propre) par sa quadrivitesse dans $\mathcal{R}$ (8.12) p. 81 :

$$\boldsymbol{p} \triangleq m\boldsymbol{u}$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées galiléennes réduites (ct, x, y, z) de $\mathcal{R}$, elle a pour composantes contravariantes :

$$\boldsymbol{p}(m\gamma_v c, mu_x, mu_y, mu_z) = \boldsymbol{p}\left(m\gamma_v c, m\,\frac{dx}{dt'}, m\,\frac{dy}{dt'}, m\,\frac{dz}{dt'}\right)$$

La quadri-impulsion généralise à l'espace-temps l'impulsion relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle de même dimension.

9.1.3 Énergie relativiste

Pour faire le lien avec la mécanique non relativiste, prenons une vitesse v petite devant la vitesse limite c. Le facteur relativiste γ_v tendant vers un, l'inertie tend vers la masse. La partie spatiale du quadrivecteur impulsion, c'est-à-dire la quantité de mouvement relativiste $\vec{p}$, tend vers la quantité de mouvement non relativiste $m\vec{v}$.

Pour la partie temporelle, prenons le développement limité de

$$\gamma_v = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

pour $v \ll c$, donc pour v^2/c^2 tendant vers zéro :

$$\begin{aligned}\gamma_v &\approx 1 + \frac{-1}{2}\left(\frac{-v^2}{c^2}\right) + \left[\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2} - 1\right)\right]\left(\frac{-v^2}{2c^2}\right)^2 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots\end{aligned}$$

Notons p_t la composante temporelle de la quadri-impulsion. La multiplication par c nous fait passer du domaine des impulsions au domaine des énergies :

$$\begin{aligned}p_t &= \gamma_v mc \\ p_t c &= \gamma_v mc^2 \\ &\approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots\end{aligned}$$

Le premier terme mc^2 est une énergie constante qui existe aussi à vitesse nulle, donc dans le référentiel propre. Le deuxième terme $mv^2/2$ est l'énergie cinétique de la mécanique non relativiste.

Définition 9.1.4. *Énergie au repos E_0*
L'énergie au repos d'un système, ou énergie propre, ou énergie de masse est le produit de sa masse par c^2 :

$$E_0 \triangleq mc^2$$

E_0 n'existe pas en mécanique non relativiste parce que l'on ne mesure ou calcule que des différences d'énergie. Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie au repos est la masse (inerte au repos) de la particule d'épreuve. Faire la différence entre ces deux notions revient à faire la différence entre un prix en dollars et un prix en euros avec un taux de change fixe.

Définition 9.1.5. *Énergie cinétique relativiste T*
L'énergie cinétique relativiste est toute l'énergie due au mouvement relatif, donc l'ensemble des termes contenant v :

$$\begin{aligned}T &\triangleq \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots \\ &\triangleq (\gamma_v - 1)\, mc^2\end{aligned}$$

Remarque 9.1.2. *Lorsque la vitesse tend vers c le facteur relativiste γ_v tend vers l'infini et donc l'énergie cinétique tend aussi vers l'infini. Il existe une vitesse limite mais pas une énergie cinétique limite.*

Définition 9.1.6. *Énergie totale relativiste E*
L'énergie totale est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique relativiste :

$$\begin{aligned}E &\triangleq E_0 + T \\ &= \gamma_v mc^2 \qquad (9.2)\\ &= Ic^2\end{aligned}$$

Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie totale relativiste du système est son inertie.

9.1.4 Quadri-impulsion

La définition 9.1.3 p. 98 de la quadri-impulsion est homogène à une quantité de mouvement :

$$\boldsymbol{p}\,(Ic, \vec{p}) = \boldsymbol{p}\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{9.3}$$

L'énergie est donc l'analogue de la quantité de mouvement dans l'espace, elle mesure le mouvement dans le temps. Tout objet a une énergie propre car il se déplace dans le temps. Multiplier la quadri-impulsion par c la rend homogène à une énergie, pour former la « quadri-énergie » :

$$\boldsymbol{E}\,(E, c\vec{p})$$

Elle n'est jamais homogène aux deux en même temps, sauf lorsque $c = 1$. Diviser la quadri-impulsion par c la rend homogène à une masse, pour former la « quadri-inertie » :

$$\boldsymbol{I}\left(I, \frac{\vec{p}}{c}\right)$$

Nous devrions l'appeler quadrivecteur inertie-énergie-impulsion, mais nous retiendrons le terme quadri-impulsion. Les relations (9.1) p. 98 et (9.2) donnent une nouvelle relation :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= I\vec{v}\\ c^2\vec{p} &= c^2 I\vec{v}\\ &= E\vec{v}\end{aligned}$$

L'énergie totale est liée à l'énergie au repos et à la quantité de mouvement relativiste :

$$\begin{aligned}\gamma_v^2(v) &= \frac{1}{1-\beta^2}\\ \gamma_v^2 - \gamma_v^2 v^2/c^2 &= 1\\ \gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 v^2 m^2 c^2 &= m^2 c^4\end{aligned}$$

$$\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2} \tag{9.4}$$

Pseudo-norme

La quadri-norme de la quadri-impulsion est invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz, ainsi que son carré :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}\|^2 &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\\ &= m\boldsymbol{u}\cdot m\boldsymbol{u}\\ &= m^2\|\boldsymbol{u}\|^2\\ &= m^2c^2\\ &= mE_0\\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons également trouver ce résultat en remarquant que dans le référentiel propre :

$$\boldsymbol{p}'\left(mc, \vec{0}\right)$$

La quadri-norme de la quadri-impulsion étant invariante :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}\|^2 &= \|\boldsymbol{p}'\|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{c^2}\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}\|^2 &= p_t^2 - \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p^2\end{aligned}$$

et avec le résultat précédent nous retrouvons la relation (9.4).

Produit scalaire avec le quadrivecteur position

Le quadri-produit scalaire du quadrivecteur position de Bob par sa quadri-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{r} \cdot m\boldsymbol{u} \\ &= mc^2 t'\end{aligned}$$

Produit scalaire avec la quadrivitesse

Le quadri-produit scalaire de la quadrivitesse de Bob et de sa quadri-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{u} \cdot m\boldsymbol{u} \\ &= mc^2\end{aligned}$$

Produit scalaire avec la quadriaccélération

Le quadri-produit scalaire de la quadriaccélération et de la quadri-impulsion est un invariant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{a} \cdot m\boldsymbol{u} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ils sont pseudo-orthogonaux dans l'espace-temps.

9.1.5 Cas des particules de masse nulle

D'après la définition 9.1.6 p. 99, l'énergie totale relativiste d'une particule a pour expression :

$$\begin{aligned}E &= \gamma_v mc^2 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Pour avoir une énergie non nulle, une particule de masse nulle doit se déplacer à la vitesse limite. Réciproquement, une particule se déplaçant à la vitesse limite doit avoir une masse nulle sinon son énergie totale serait infinie.

Dans le cas d'une particule de masse nulle se déplaçant à la vitesse limite, l'expression précédente donne zéro sur zéro et l'énergie de la particule est indéterminée (plus précisément, elle ne peut être déterminée par cette expression). Supposons que la masse du photon soit nulle et qu'il se déplace à la vitesse limite. Son énergie (donc son inertie) et sa quantité de mouvement relativiste ne sont pas nulles, car en utilisant la relation de Planck qui lie l'énergie totale du photon à sa fréquence ν, nous avons :

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ I &= \frac{h\nu}{c^2} \end{aligned}$$

Avec la définition 9.1.2 p. 98, la norme de sa quantité de mouvement relativiste s'écrit :

$$\begin{aligned} p &= Ic \\ &= \frac{h\nu}{c} \end{aligned}$$

Si donc la masse du photon est nulle et sa vitesse constante (égale à la vitesse limite), il a quand même une énergie (donc une inertie) et une quantité de mouvement relativistes non nulles, et variables car fonctions de la fréquence ν. Les grandeurs E et $\vec{p}$ sont donc plus fondamentales que les grandeurs masse et vitesse, car elles subsistent lorsque la masse est nulle et la vitesse constante.

9.1.6 Transformation spéciale des composantes de la quadri-impulsion

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 p. 6), de vitesse relative v_e. La quadri-impulsion étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit ($c = 1$) :

$$\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} p_t \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}'\begin{pmatrix} p'_t \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} p'_t = \gamma_e(p_t - v_e p_x) \\ p'_x = \gamma_e(p_x - v_e p_t) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

où les composantes de la quadri-impulsion sont données par (9.3) p. 100.

> Remarque 9.1.3. *Pour retrouver les formules avec $c = 299\ 792\ 458$ m/s, remplacer v_e par v_e/c.*

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} p'^0 = \gamma p^0 - \gamma v_e p^1 \\ p'^1 = -\gamma v_e p^0 + \gamma p^1 \\ p'^2 = p^2 \\ p'^3 = p^3 \end{cases}$$

9.1.7 Conservation de la quadri-impulsion

Comme tout quadrivecteur, la quadri-impulsion est *invariante par changement de référentiel galiléen*, mais cela ne signifie pas que la somme des quadri-impulsions *se conserve lors d'une interaction*, autrement dit que la quadri-impulsion d'un système isolé *se conserve dans le temps*. À basse vitesse elle donne l'énergie cinétique et la quantité de mouvement, deux quantités qui se conservent lors d'une interaction en mécanique non relativiste (l'énergie d'agitation thermique est une forme d'énergie cinétique).

On vérifie expérimentalement mais on ne peut démontrer que la quadri-impulsion se conserve lors d'une interaction. Soient deux systèmes de quadri-impulsion $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$. Par hypothèse basée sur l'expérience :

$$\forall \mu = 1, \ldots, 4 \qquad p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

— La partie temporelle donne la conservation de l'inertie et non plus celle de la masse inerte de la mécanique non relativiste. Avec la relation (9.3) p. 100 :

$$\begin{gathered} p_1^0 + p_2^0 = p_1'^0 + p_2'^0 \\ I_1 c + I_2 c = I_1' c + I_2' c \\ I_1 + I_2 = I_1' + I_2' \end{gathered}$$

L'inertie $I(v)$ d'une particule, donc son énergie totale $E = Ic^2$, n'est pas invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais la somme des inerties (donc des énergies totales) est conservée par hypothèse lors d'une interaction.

Réciproquement, la masse m d'une particule, donc son énergie au repos $E_0 = mc^2$, est absolue puisqu'elle n'est définie que dans le référentiel propre de la particule, mais la somme des masses (donc des énergies au repos) ne se conserve pas lors d'une interaction puisque c'est la somme des énergies totales qui se conserve.

— La partie spatiale donne la conservation de la quantité de mouvement relativiste selon chaque axe :

$$\begin{array}{lcl} p_1^1 + p_2^1 = p_1'^1 + p_2'^1 & \Rightarrow & p_{x_1} + p_{x_2} = p'_{x_1} + p'_{x_2} \\ p_1^2 + p_2^2 = p_1'^2 + p_2'^2 & \Rightarrow & p_{y_1} + p_{y_2} = p'_{y_1} + p'_{y_2} \\ p_1^3 + p_2^3 = p_1'^3 + p_2'^3 & \Rightarrow & p_{z_1} + p_{z_1} = p'_{z_1} + p'_{z_1} \end{array}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

La conservation de la quantité de mouvement est remplacée par la conservation de la quantité de mouvement relativiste, l'inertie $I(v) = \gamma_v m$ remplaçant la masse inerte m.

La quantité de mouvement relativiste d'une particule n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais par hypothèse la somme des quantités de mouvement relativistes se conserve lors d'une interaction.

9.2 Quadriforce

Définition 9.2.1. *Quadriforce* $\boldsymbol{F}$
La quadriforce exercée sur un système est la dérivée de la quadri-impulsion de ce système par rapport au temps propre de ce système :

$$\boldsymbol{F} \triangleq \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}$$

Autrement dit

$$\boldsymbol{F}\left(c\,\frac{d(\gamma_v m)}{d\tau}, \frac{d(\gamma_v m\vec{v})}{d\tau}\right)$$

En supposant la masse (inerte au repos) du système constante, avec la relation (8.17) p. 88 :

$$\boldsymbol{F} = m\mathbf{a}\left(c\,\frac{d\gamma_v}{d\tau}, \vec{\mathrm{a}}\right)$$

d'où

$$\boldsymbol{F}\left(m\,\frac{\gamma_v^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a},\ m\gamma_v^2\vec{a} + m\,\frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right)$$

Définition 9.2.2. *Trivecteur force relativiste* $\vec{\mathrm{f}}$
Le trivecteur force relativiste est la dérivée de la quantité de mouvement relativiste par le temps propre :

$$\vec{\mathrm{f}} \triangleq \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

Avec la définition 9.1.2 p. 98 de la quantité de mouvement relativiste :

$$\vec{\mathrm{f}} = \frac{d(m\vec{u})}{d\tau}$$

En supposant la masse constante, avec la définition 8.9.1 p. 87 de l'accélération propre :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{f}} &= m\vec{\mathrm{a}} \\
&= m\left[\gamma_v^2\vec{a} + \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right] \\
\vec{\mathrm{f}}\cdot\vec{v} &= \gamma_v^2 m\left[(\vec{v}\cdot\vec{a}) + \frac{\gamma_v^2}{c^2}\,v^2\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right] \\
&= \gamma_v^2 m\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\left(1 + \frac{\gamma_v^2 v^2}{c^2}\right) \\
&= \gamma_v^2 m\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\left(1 + \frac{v^2}{c^2(1 - v^2/c^2)}\right) \\
&= \gamma_v^2 m\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\left(\frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2(1 - v^2/c^2)}\right) \\
&= \gamma_v^4 m\vec{v}\cdot\vec{a}
\end{aligned}$$

La quadriforce généralise à l'espace-temps la force relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle :

$$\boldsymbol{F}\left(\tfrac{1}{c}\,\vec{\mathrm{f}}\cdot\vec{v}, \vec{\mathrm{f}}\right)$$

$$\boldsymbol{F}\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\,\vec{\mathrm{f}}\cdot\vec{v} \\ \mathrm{f}_x \\ \mathrm{f}_y \\ \mathrm{f}_z \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

9.2.1 Transformation spéciale des composantes de la quadriforce

Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard (1.2.3 p. 6), de vitesse relative v_e. La quadriforce étant un invariant relativiste, sa transformation spéciale de Lorentz s'écrit $(c = 1)$:

$$\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}F_t\\F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix} = \boldsymbol{F}'\begin{pmatrix}F'_t\\F'_x\\F'_y\\F'_z\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases}F'_t = \gamma_e(F_t - v_e F_x)\\F'_x = \gamma_e(F_x - v_e F_t)\\F'_y = F_y\\F'_z = F_z\end{cases}$$

où les composantes de la quadriforce sont données par (9.5) p. 104.

> Remarque 9.2.1. *Pour retrouver les formules avec* $c = 299\ 792\ 458$ m/s*, remplacer* v_e *par* v_e/c*.*

En notation indicielle :

$$\forall \mu = 0, \ldots, 3 F'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} F^{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}F'^0 = \gamma_e F^0 - \gamma_e v_e F^1\\F'^1 = -\gamma_e v_e F^0 + \gamma_e F^1\\F'^2 = F^2\\F'^3 = F^3\end{cases}$$