LA FORMULE DE STIRLING

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Démonstration de la formule d'approximation de James Stirling, $\ln(n!) \approx n \ln n - n$.

TABLE DES MATIÈRES

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1. Fonction Π de Gauss.

Théorème 1.1. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

Démonstration. On intègre par parties en posant : $u = x^n$, $u' = nx^{n-1}$, $v' = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nx^{n-1}(-e^{-x})dx \\ &= -\left[x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx\end{aligned}$$

On réitère l'intégration par parties sur le dernier terme :

$$\begin{aligned}&= -\left[x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} - n\left[x^{n-1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n(n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x}dx \\ &= -\left[\left(x^n + nx^{n-1}\right)e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n(n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x}dx \\ &= -\Big\{\left[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots\right. \\ &\qquad \left. + n(n-1)\times\dots\times[n-(n-1)]x\right]e^{-x}\Big\}_0^{+\infty} + n!\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\end{aligned}$$

Date: 4 mai 2015.

$$
\begin{aligned}
&= n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\
&= n! \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} \\
&= n!
\end{aligned}
$$

□

1.2. **Intégrale de Gauss.**

Théorème 1.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Démonstration.

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2}
$$

Les coordonnées cartésiennes x et y étant indépendantes,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{1/2}
$$

Passons en coordonnées polaires,

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta \\
y &= \rho \sin\theta
\end{aligned}
$$

Nous avons donc,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta \\
&= \rho^2
\end{aligned}
$$

Cherchons l'expression de l'élément de surface $d^2 s(\rho, \theta)$ qui remplacera celui en coordonnées cartésiennes $dxdy$. Le vecteur position s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{OM} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \\
&= \rho\cos\theta\boldsymbol{i} + \rho\sin\theta\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

et les vecteurs de base,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\rho &= \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \rho} \\
&= \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \theta} \\
&= -\rho\sin\theta\boldsymbol{i} + \rho\cos\theta\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons leurs normes,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{e}_\rho\| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= 1 \\ \|\boldsymbol{e}_\theta\| &= \sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta} \\ &= \rho\end{aligned}$$

Pour construire l'élément de surface d^2s, prenons une variation le long de la coordonnée ρ,

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{OM} &= \frac{\partial\boldsymbol{OM}}{\partial\rho}\,d\rho \\ &= \boldsymbol{e}_\rho\,d\rho\end{aligned}$$

et une variation le long de la coordonnée θ,

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{OM} &= \frac{\partial\boldsymbol{OM}}{\partial\theta}\,d\theta \\ &= \boldsymbol{e}_\theta\,d\theta\end{aligned}$$

puis prenons la norme de leur produit vectoriel :

$$\begin{aligned}d^2s &= \|\boldsymbol{e}_\rho\,d\rho \times \boldsymbol{e}_\theta\,d\theta\| \\ &= \rho\,d\rho\,d\theta\end{aligned}$$

L'espace est parcouru dans son ensemble pour ρ variant de 0 à $+\infty$ et pour θ variant de 0 à 2π, si bien que,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx &= \left(\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\theta\,d\rho\right)^{1/2} \\ &= \left(2\pi\int_0^{+\infty}\rho\,e^{-\rho^2}d\rho\right)^{1/2} \\ &= \left\{2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}\right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

□

2. Démonstration de la formule de Stirling

Théorème 2.1. $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Démonstration. D'après le théorème (1.1) :

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$$

On commence par sortir n^{n+1} de l'intégrale grâce au changement de variable $x = ns$, $dx = nds$. Les bornes d'intégration restent inchangées.

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{+\infty} (ns)^n e^{-ns} nds \\ &= n^{n+1} \int_0^{+\infty} s^n e^{-ns} ds \end{aligned}$$

On regroupe les termes sous l'exponentielle,

$$n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(\ln s - s)} ds$$

dans le but futur de sortir e^{-n} de l'intégrale.

Pour pouvoir utiliser le développement en séries entières de la fonction logarithme népérien on effectue le changement de variable $s = 1 + w$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned} n! =& n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n[\ln(1+w)-(1+w)]} dw \\ =& n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots - 1 - w\right)} dw \\ =& n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{n\left(-1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^6}{6} + \frac{w^7}{7} - \frac{w^8}{8} + \frac{w^9}{9} - \frac{w^{10}}{10} + \frac{w^{11}}{11} - \frac{w^{12}}{12} + \dots\right)} dw \\ =& n^{n+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{-n} \times e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\ & \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw \\ =& n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} \times e^{\frac{nw^3}{3}} \times e^{\frac{-nw^4}{4}} \times e^{\frac{nw^5}{5}} \times e^{\frac{-nw^6}{6}} \\ & \times e^{\frac{nw^7}{7}} \times e^{\frac{-nw^8}{8}} \times e^{\frac{nw^9}{9}} \times e^{\frac{-nw^{10}}{10}} \times e^{\frac{nw^{11}}{11}} \times e^{\frac{-nw^{12}}{12}} \times \dots \times dw \end{aligned}$$

et nous avons sorti e^{-n} de l'intégrale.

Dans l'intégrale, on développe en série entière les fonctions exponentielles, excepté la première.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned}n! = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}} &\times\left(1+\frac{nw^3}{3}+\frac{n^2w^6}{18}+\frac{n^3w^9}{162}+\frac{n^4w^{12}}{1944}+\dots\right)\\
&\times\left(1-\frac{nw^4}{4}+\frac{n^2w^8}{32}-\frac{n^3w^{12}}{384}+\dots\right)\\
&\times\left(1+\frac{nw^5}{5}+\frac{n^2w^{10}}{50}+\frac{n^3w^{15}}{750}+\dots\right)\\
&\times\left(1-\frac{nw^6}{6}+\frac{n^2w^{12}}{72}-\frac{n^3w^{18}}{1296}+\dots\right)\\
&\times\left(1+\frac{nw^7}{7}+\frac{n^2w^{14}}{98}+\frac{n^3w^{21}}{2058}+\dots\right)\\
&\times\left(1-\frac{nw^8}{8}+\frac{n^2w^{16}}{128}-\frac{n^3w^{24}}{3072}+\dots\right)\\
&\times\left(1+\frac{nw^9}{9}+\frac{n^2w^{18}}{162}+\frac{n^3w^{27}}{4374}+\dots\right)\\
&\times\left(1-\frac{nw^{10}}{10}+\frac{n^2w^{20}}{200}-\frac{n^3w^{30}}{6000}+\dots\right)\\
&\times\left(1+\frac{nw^{11}}{11}+\frac{n^2w^{22}}{242}+\frac{n^3w^{33}}{7986}+\dots\right)\\
&\times\left(1-\frac{nw^{12}}{12}+\frac{n^2w^{24}}{288}-\frac{n^3w^{36}}{10368}+\dots\right)\\
&\times\dots\times dw\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n! =&n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}}\times\\
&\left(1+\frac{nw^3}{3}-\frac{nw^4}{4}+\frac{nw^5}{5}-\frac{nw^6}{6}+\frac{nw^7}{7}-\frac{nw^8}{8}+\frac{nw^9}{9}\right.\\
&-\frac{nw^{10}}{10}+\frac{nw^{11}}{11}-\frac{nw^{12}}{12}+\dots+\frac{n^2w^6}{18}-\frac{n^2w^7}{12}+\frac{n^2w^8}{32}\\
&+\frac{n^2w^8}{15}-\frac{n^2w^9}{20}-\frac{n^2w^9}{18}+\frac{n^2w^{10}}{24}+\frac{n^2w^{10}}{21}+\frac{n^2w^{10}}{50}\\
&-\frac{n^2w^{11}}{30}-\frac{n^2w^{11}}{28}-\frac{n^2w^{11}}{24}+\frac{n^2w^{12}}{35}+\frac{n^2w^{12}}{32}+\frac{n^2w^{12}}{72}\\
&+\dots+\frac{n^3w^9}{162}-\frac{n^3w^{10}}{72}+\frac{n^3w^{11}}{96}+\frac{n^3w^{11}}{90}-\frac{n^3w^{12}}{108}\\
&\left.+\dots+\frac{n^4w^{12}}{1944}+\dots\right)dw\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n! =& n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{+\infty} e^{\frac{-nw^2}{2}}\left[1+\frac{nw^3}{3}-\frac{nw^4}{4}+\frac{nw^5}{5}+\left(-\frac{n}{6}+\frac{n^2}{18}\right)w^6\right.\\
&+\left(\frac{n}{7}-\frac{n^2}{12}\right)w^7+\left(-\frac{n}{8}+\frac{47n^2}{480}\right)w^8+\left(\frac{n}{9}-\frac{19n^2}{180}+\frac{n^3}{162}\right)w^9\\
&+\left(-\frac{n}{10}+\frac{459n^2}{4200}-\frac{n^3}{72}\right)w^{10}+\left(\frac{n}{11}-\frac{93n^2}{840}+\frac{31n^3}{1440}\right)w^{11}\\
&\left.+\left(-\frac{n}{12}+\frac{743n^2}{10080}-\frac{n^3}{108}+\frac{n^4}{1944}\right)w^{12}+\dots\right]dw
\end{aligned}$$

Pour intégrer l'exponentielle dans l'intégrale, on effectue le changement de variable $v=\sqrt{\frac{n}{2}}\,w$, d'où $w=\sqrt{\frac{2}{n}}\,v$ et $dw=\sqrt{\frac{2}{n}}\,dv$. La borne d'intégration inférieure, $w=-1$, devient $v=-\sqrt{\frac{n}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{nw^3}{3} &= \frac{n}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}v^3\\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}\,v^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{nw^4}{4} &= \frac{n}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^{2}v^4\\
&= \frac{v^4}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{nw^5}{5} &= \frac{n}{5}\left(\frac{2}{n}\right)^{5/2}v^5\\
&= \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{n^3}}\,v^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{n}{6}+\frac{n^2}{18}\right)w^6 &= \left(-\frac{n}{6}+\frac{n^2}{18}\right)\frac{8}{n^3}v^6\\
&= \left(-\frac{4}{3n^2}+\frac{4}{9n}\right)v^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{7}-\frac{n^2}{12}\right)w^7 &= \left(\frac{n}{7}-\frac{n^2}{12}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{7/2}v^7\\
&= \left(\frac{8}{7}\sqrt{\frac{2}{n^5}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n^3}}\right)v^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{8}+\frac{47n^2}{480}\right)w^8 &= \left(-\frac{n}{8}+\frac{47n^2}{480}\right)\frac{16}{n^4}\,v^8\\ &= \left(-\frac{2}{n^3}+\frac{47}{30n^2}\right)v^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{9}-\frac{19n^2}{180}+\frac{n^3}{162}\right)w^9 &= \left(\frac{n}{9}-\frac{19n^2}{180}+\frac{n^3}{162}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{9/2}v^9\\ &= \left(\frac{16}{9}\sqrt{\frac{2}{n^7}}-\frac{76}{45}\sqrt{\frac{2}{n^5}}+\frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{n^3}}\right)v^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{n}{10}+\frac{459n^2}{4200}-\frac{n^3}{72}\right)w^{10} &= \left(-\frac{n}{10}+\frac{459n^2}{4200}-\frac{n^3}{72}\right)\frac{32}{n^5}\,v^{10}\\ &= \left(-\frac{16}{5n^4}+\frac{612}{175n^3}-\frac{4}{9n^2}\right)v^{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{11}-\frac{93n^2}{840}+\frac{31n^3}{1440}\right)w^{11} &= \left(\frac{n}{9}-\frac{93n^2}{840}+\frac{31n^3}{1440}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{11/2}v^{11}\\ &= \left(\frac{16}{9}\sqrt{\frac{2}{n^9}}-\frac{744}{210}\sqrt{\frac{2}{n^7}}+\frac{31}{45}\sqrt{\frac{2}{n^5}}\right)v^{11}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{n}{12}+\frac{743n^2}{10080}-\frac{n^3}{108}+\frac{n^4}{1944}\right)w^{12}\\ &\qquad= \left(-\frac{n}{12}+\frac{743n^2}{10080}-\frac{n^3}{108}+\frac{n^4}{1944}\right)\times\frac{64}{n^6}\,v^{12}\\ &\qquad= \left(-\frac{16}{3n^5}+\frac{1486}{315n^4}-\frac{16}{27n^3}+\frac{8}{243n^2}\right)v^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n! = n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty}e^{-v^2}\Bigg(&1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}\,v^3-\frac{v^4}{n}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{n^3}}\,v^5\\ &+\frac{4v^6}{9n}-\frac{4v^6}{3n^2}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n^3}}\,v^7+\frac{47v^8}{30n^2}\\ &+\frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{n^3}}v^9-\frac{4v^{10}}{9n^2}+\frac{8v^{12}}{243n^2}+\dots\Bigg)\,dv\end{aligned}$$

où les termes suivants sont en n^{-k} avec $k > 2$.

$$\begin{aligned}
n! = \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Bigg(& \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \\
& - \frac{1}{n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^5 e^{-v^2} dv \\
& + \frac{4}{9n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv - \frac{4}{3n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\
& - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^7 e^{-v^2} dv + \frac{47}{30n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\
& + \frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{n^3}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^9 e^{-v^2} dv - \frac{4}{9n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\
& + \frac{8}{243n^2} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv + \dots \Bigg)
\end{aligned}$$

de la forme,

$$\begin{aligned}
n! = \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n & (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 \\
& + \alpha_7 I_7 + \alpha_8 I_8 + \alpha_9 I_9 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots)
\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{n}, \quad \alpha_4 = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{n^3}}, \\
& \alpha_5 = \frac{4}{9n}, \quad \alpha_6 = -\frac{4}{3n^2}, \quad \alpha_7 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_8 = \frac{47}{30n^2}, \\
& \alpha_9 = \frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{n^3}}, \quad \alpha_{10} = -\frac{4}{9n^2}, \quad \alpha_{11} = \frac{8}{243n^2}
\end{aligned}$$

On calcule chaque intégrale en faisant tendre n vers l'infini. Pour la première on utilise le théorème (1.2) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^3 e^{-v^2} dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

car la fonction dans I_2 est impaire. De même $I_4 = I_7 = I_9 = 0$.

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^3$, $y' = 3v^2$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_3 =& \left\{ \left[-\frac{1}{2} v^3 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-v^2} dv \end{aligned}$$

On intègre de nouveau par parties :
$y = v$, $y' = 1$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_3 =& \frac{3}{2} \left\{ \left[-\frac{1}{2} v e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^5$, $y' = 5v^4$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned} I_5 =& \left\{ \left[-\frac{1}{2} v^5 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\ =& \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 =& \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\ =& \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^7$, $y' = 7v^6$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned}I_8 =& \left\{ \left[-\frac{1}{2} v^7 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{7}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 e^{-v^2} dv \\ =& \frac{7}{2} \times \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \\ =& \frac{105}{16} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^9$, $y' = 9v^8$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned}I_{10} =& \left\{ \left[-\frac{1}{2} v^9 e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^8 e^{-v^2} dv \\ =& \frac{9}{2} \times \frac{105}{16} \sqrt{\pi} \\ =& \frac{945}{32} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{12} e^{-v^2} dv$$

On intègre par parties : $y = v^{11}$, $y' = 11v^{10}$, $z' = ve^{-v^2}$, $z = -\frac{1}{2}e^{-v^2}$,

$$\begin{aligned}I_{11} =& \left\{ \left[-\frac{1}{2} v^{11} e^{-v^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \right\} \\ =& \frac{11}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v^{10} e^{-v^2} dv \\ =& \frac{11}{2} \times \frac{945}{32} \sqrt{\pi} \\ =& \frac{10395}{64} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
n! &= \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (\alpha_1 I_1 + \alpha_3 I_3 + \alpha_5 I_5 + \alpha_6 I_6 \\
&\qquad + \alpha_8 I_8 + \alpha_{10} I_{10} + \alpha_{11} I_{11} + \dots) \\
&= \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\sqrt{\pi} - \frac{1}{n} \times \frac{3}{4}\sqrt{\pi} + \frac{4}{9n} \times \frac{15}{8}\sqrt{\pi} - \frac{4}{3n^2} \times \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{47}{30n^2} \times \frac{105}{16}\sqrt{\pi} - \frac{4}{9n^2} \times \frac{945}{32}\sqrt{\pi} + \frac{8}{243n^2} \times \frac{10395}{64}\sqrt{\pi} + \dots\right) \\
&= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{3}{4n} + \frac{5}{6n} - \frac{5}{2n^2} + \frac{329}{32n^2} - \frac{105}{8n^2} + \frac{385}{72n^2} + \dots\right) \\
&= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right) \\
&= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{avec } \lim_{n\to\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration. □

A partir du théorème (2.1) nous obtenons directement la formule de Stirling :

$$
\begin{aligned}
\ln(n!) &\approx \ln\left(\sqrt{2\pi n}\right) + n\ln\left(\frac{n}{e}\right) \\
&\approx \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + n\ln n - n\ln e \\
&\approx n\ln n - n
\end{aligned}
$$

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/