TENSEUR D'INERTIE

OLIVIER CASTÉRA

Résumé. Le tenseur d'inertie calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie d'un solide est une caractéristique intrinsèque de ce solide. Il apparait naturellement lorsque l'on calcule le moment cinétique d'un solide par rapport à son centre d'inertie, ou son énergie cinétique de rotation.

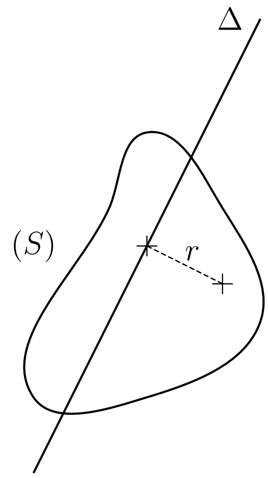
Table des matières

1. Moment d'inertie 1
2. Tenseur d'inertie 2
3. Repère principal d'inertie 5
3.1. Moments principaux d'inertie 5
3.2. Axes principaux d'inertie 6
3.3. Ellipsoïde d'inertie 6
3.4. Théorème de Huygens 7
4. Moment cinétique 8
4.1. Moment cinétique par rapport à un point 8
4.2. Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation 10
4.3. Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie 11
5. Energie cinétique d'un solide 11
6. Annexe 12

1. Moment d'inertie

Soit un solide S et soit Δ un axe quelconque ne passant pas nécessairement par S, de direction fixe dans le repère (R).

Date: 22 novembre 2015.



Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ est un scalaire qui caractérise l'inertie en rotation du solide S autour de l'axe Δ.

Définition 1.1. *Moment d'inertie*
Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe Δ, est la somme des masses m_i de ce système, pondérées par leurs distances r_i à l'axe au carré :

$$I_\Delta \triangleq \sum_i m_i \, r_i^2$$

Dans le cas d'un système continu :

Définition 1.2. *Moment d'inertie*
Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ, d'un solide S de volume V et de masse volumique $\rho(x, y, z)$, a pour expression :

$$I_\Delta \triangleq \iiint_V \rho \, r^2 \, d^3V$$

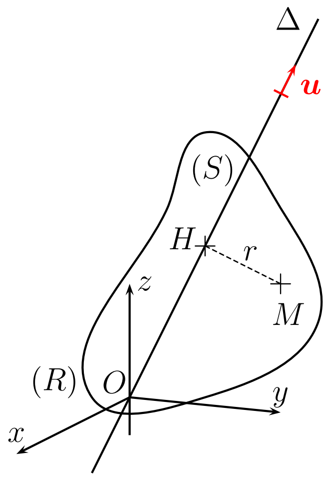
Le moment d'inertie dépend du choix de l'axe Δ mais pas du choix du repère (R), car seule la distance à l'axe intervient.

Remarque. Lorsque le solide est homogène, sa densité est constante dans l'espace et l'on peut sortir ρ de l'intégrale de volume.

2. Tenseur d'inertie

Cherchons l'expression du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque Δ, en fonction du tenseur d'inertie. Soit (R) un repère orthonormé dont le centre O est sur l'axe Δ. Soit un élément de volume du solide S, de masse dm, situé au point M tel que $\boldsymbol{OM}(x, y, z)$.

Soit $\boldsymbol{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur unitaire de l'axe Δ, et soit H la projection orthogonale de M sur l'axe Δ, tel que $r = MH$.



En appliquant le théorème de pythagore dans le triangle OMH rectangle en H :

$$\begin{aligned} MH^2 &= OM^2 - OH^2 \\ &= OM^2 - (\boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{u})^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}$ étant unitaire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} MH^2 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 + (x^2 + y^2 + z^2)\beta^2 + (x^2 + y^2 + z^2)\gamma^2 \\ &\quad - \big(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + 2xy\alpha\beta + 2yz\beta\gamma + 2xz\alpha\gamma\big) \\ &= (y^2 + z^2)\alpha^2 + (x^2 + z^2)\beta^2 + (x^2 + y^2)\gamma^2 \\ &\quad - 2xy\alpha\beta - 2yz\beta\gamma - 2xz\alpha\gamma \end{aligned}$$

Ecrivons l'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe Δ :

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \iiint_V \rho \; MH^2 \, dV \\ &= \alpha^2 \int_V \rho(y^2 + z^2) d^3V + \beta^2 \int_V \rho(x^2 + z^2) d^3V + \gamma^2 \int_V \rho(x^2 + y^2) d^3V \\ &\quad - \alpha\beta \int_V \rho \; 2xy \, d^3V - \beta\gamma \int_V \rho \; 2yz \, d^3V - \alpha\gamma \int_V \rho \; 2xz \, d^3V \end{aligned} \tag{1}$$

Nous pouvons écrire cette expression sous la forme de deux produits :

$$
\begin{aligned}
I_\Delta &= \begin{pmatrix} \alpha\int\rho(y^2+z^2)d^3V & -\beta\int\rho\,xyd^3V & -\gamma\int\rho\,xzd^3V \\ -\alpha\int\rho\,xyd^3V & \beta\int\rho(x^2+z^2)d^3V & -\gamma\int\rho\,yzd^3V \\ -\alpha\int\rho\,xzd^3V & -\beta\int\rho\,yzd^3V & \gamma\int\rho(x^2+y^2)d^3V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int\rho(y^2+z^2)d^3V & -\int\rho\,xyd^3V & -\int\rho\,xzd^3V \\ -\int\rho\,xyd^3V & \int\rho(x^2+z^2)d^3V & -\int\rho\,yzd^3V \\ -\int\rho\,xzd^3V & -\int\rho\,yzd^3V & \int\rho(x^2+y^2)d^3V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \\
&= [I]_O\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (2) \\
&= \boldsymbol{u}\cdot[I]_O\,\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

où $[I]_O$ est le tenseur d'inertie du solide S calculé au centre O du repère (R). La première opération effectuée, $[I]_O\,\boldsymbol{u}$, est la multiplication d'une matrice par un vecteur colonne, elle redonne un vecteur colonne. La seconde opération est alors le produit scalaire de deux vecteurs.

Le tenseur d'inertie dépend du choix du centre O et de l'orientation des axes du repère (R), comme on peut le constater dans l'expression de ses éléments. Par contre, il ne dépend pas du choix de l'axe Δ.

Dans l'expression du premier terme diagonal, y^2+z^2 est la distance au carré à l'axe x. Les termes diagonaux sont par conséquent les *moments d'inertie* par rapport aux axes x, y, z du repère (R). Les opposés des termes non diagonaux sont appelés *produits d'inertie*.

Exemple.
Supposons que l'axe Δ soit confondu avec l'axe des z :

$$
\begin{aligned}
I_z &= [I]_O\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} \\
&= \rho\begin{pmatrix} \int(y^2+z^2)d^3V & -\int xyd^3V & -\int xzd^3V \\ -\int xyd^3V & \int(x^2+z^2)d^3V & -\int yzd^3V \\ -\int xzd^3V & -\int yzd^3V & \int(x^2+y^2)d^3V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \rho\begin{pmatrix} -\iiint xzd^3V \\ -\iiint yzd^3V \\ \iiint(x^2+y^2)d^3V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \rho\iiint(x^2+y^2)d^3V
\end{aligned}
$$

qui est le moment d'inertie par rapport à l'axe z.

Définition 2.1. *Tenseur d'inertie*
Le tenseur d'inertie calculé au centre O d'un repère (R), d'un solide de volume V et de masse volumique ρ, s'écrit :

$$
[I]_O \triangleq \begin{pmatrix} \iiint\rho(y^2+z^2)d^3V & -\iiint\rho\,xyd^3V & -\iiint\rho\,xzd^3V \\ -\iiint\rho\,xyd^3V & \iiint\rho(x^2+z^2)d^3V & -\iiint\rho\,yzd^3V \\ -\iiint\rho\,xzd^3V & -\iiint\rho\,yzd^3V & \iiint\rho(x^2+y^2)d^3V \end{pmatrix}
$$

Notation. Le tenseur $[I]$ est aussi noté $\mathbf{I}$, $\overset{\Rightarrow}{I}$, $\overset{\leftrightarrow}{I}$, $\hat{I}$, $\underset{=}{I}$, $\underset{\approx}{I}$. Cependant, c'est la notation indicielle de ses éléments I_{ij} qui s'est imposée pour des raisons pratiques lors de la résolution d'équations :

$$[I]_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Il faut deux indices pour repérer ses éléments, c'est donc un tenseur d'ordre deux. Il est symétrique :

$$I_{ij} = I_{ji}$$

Chaque indice pouvant prendre trois valeurs, x, y ou z, il appartient à un espace vectoriel de dimension 3.

Les signes négatifs sont conventionnels. La dimension de l'espace puissance l'ordre du tenseur donne le nombre de composantes du tenseur, soit $3^2 = 9$ composantes.

3. Repère principal d'inertie

Comme tout tenseur symétrique d'ordre deux, le tenseur d'inertie en tout point O peut être diagonalisé[1].

3.1. Moments principaux d'inertie.

Cherchons les vecteur propres non nuls $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ liés au point O tels que l'on ait l'équation aux valeurs propres suivante :

$$[I]_O \boldsymbol{P} = I \boldsymbol{P}$$

où I est un scalaire. Soit donc à résoudre le système d'équations linéaires homogènes :

$$\begin{cases} (I_{xx} - I)x + I_{xy}y + I_{xz}z = 0 \\ I_{yx}x + (I_{yy} - I)y + I_{yz}z = 0 \\ I_{zx}x + I_{zy}y + (I_{zz} - I)z = 0 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non triviales si le déterminant des coefficients s'annule,

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne l'*équation caractéristique* d'ordre trois en I :

$$\begin{aligned} (I_{xx} - I)&[(I_{yy} - I)(I_{zz} - I) - I_{zy}I_{yz}] \\ &- I_{yx}[I_{xy}(I_{zz} - I) - I_{zy}I_{xz}] \\ &\qquad + I_{zx}[I_{xy}I_{yz} - (I_{yy} - I)I_{xz}] = 0 \end{aligned}$$

1. Voir Algebre lineaire.pdf

Les trois racines I_x, I_y, I_z de ce polynôme sont les valeurs propres du tenseur d'inertie, et sont les *moments principaux d'inertie* au point O. Nous obtenons alors le *tenseur principal d'inertie* au point O :

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

3.2. **Axes principaux d'inertie.**
Cherchons les directions des trois vecteurs propres qui forment le référentiel d'inertie de centre O. Commençons par le vecteur propre associé à la valeur propre I_x :

$$\begin{pmatrix} I_{xx} - I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I_x & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I_x \end{pmatrix}$$

où les vecteurs colonne sont linéairement dépendants. En utilisant par exemple la première ligne, on choisit les valeurs des coordonnées du premier vecteur propre $\boldsymbol{P}_1(x_1, y_1, z_1)$, telles que l'on ait :

$$(I_{xx} - I_x)\, x_1 + I_{xy}\, y_1 + I_{xz}\, z_1 = 0$$

Ainsi $\boldsymbol{P}_1$ est défini à un facteur multiplicatif près, et nous avons donc sa direction. Nous procédons de même pour les deux autres vecteurs propres. Les vecteurs propres sont les *axes principaux d'inertie* qui forment le *repère principal d'inertie* $(O, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)$ dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal. Ainsi, il existe un repère principal d'inertie en tout point O.

En particulier, le tenseur d'inertie calculé dans le repère principal d'inertie ayant pour centre le centre d'inertie G du système, est une caractéristique intrinsèque de ce système (elle ne dépend que du système), comme le sont sa masse, son volume ou sa charge électrique. C'est la répartition des masses du solide S, pondérée par la distance au centre d'inertie au carré.

3.3. **Ellipsoïde d'inertie.**
Soit un solide S, et soit un repère (R) de centre O. Le tenseur d'inertie $[I]_O$ est donc fixé. Soit Δ un axe de rotation quelconque, de vecteur

unitaire $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\begin{aligned} I_\Delta &= [I]_O \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx}\alpha - I_{xy}\beta - I_{xz}\gamma \\ -I_{xy}\alpha + I_{yy}\beta - I_{yz}\gamma \\ -I_{xz}\alpha - I_{yz}\beta + I_{zz}\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\beta\alpha - 2I_{xz}\gamma\alpha - 2I_{yz}\beta\gamma \end{aligned}$$

on retrouve l'équation (1). C'est l'équation d'un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde d'inertie*, dans laquelle les composantes du tenseur d'inertie sont des paramètres.

Pour chaque axe Δ défini par une direction $\mathbf{u}$, autrement dit pour chaque ensemble de valeurs (α, β, γ), l'équation donne une valeur pour le moment d'inertie I_Δ du solide S. De même qu'un vecteur peut être représenté par une flèche, un tenseur symétrique d'ordre deux peut être représenté par un ellipsoïde.

3.4. **Théorème de Huygens.**

Théorème 3.1. *Soit Δ_G un axe parallèle à l'axe Δ et passant par le centre d'inertie G d'un solide S de masse m. Soit $a = KH$ la distance entre ces deux axes, où $K \in \Delta_G$ et $H \in \Delta$, alors :*

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \rho \iiint (MH)^2 \, d^3V \\ &= \iiint \rho \, (\mathbf{MK} + \mathbf{KH}) \cdot (\mathbf{MK} + \mathbf{KH}) \, d^3V \\ &= \iiint \rho \, (MK)^2 d^3V + \iiint \rho \, (KH)^2 d^3V + 2 \iiint \rho \, \mathbf{MK} \cdot \mathbf{KH} \, d^3V \\ &= I_{\Delta_G} + a^2 m + 2 \iiint \rho \, (\mathbf{MG} + \mathbf{GK}) \cdot \mathbf{KH} \, d^3V \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{KH}$ étant constant :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m + 2\mathbf{KH} \cdot \iiint \rho \, \mathbf{MG} \, d^3V + 2 \iiint \rho \, \mathbf{GK} \cdot \mathbf{KH} \, d^3V$$

Par définition du centre d'inertie, $\iiint \rho \, \mathbf{MG} \, d^3V = 0$.
De plus, $\mathbf{GK} \perp \mathbf{KH}$, d'où :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + a^2 m$$

□

4. Moment cinétique

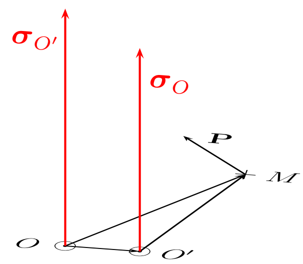
Définition 4.1. *Moment cinétique*
Le moment cinétique[2] par rapport à un point quelconque O, d'un corps situé en M, est le produit vectoriel du rayon vecteur $\boldsymbol{OM}$ par la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ de ce corps.

$$\boldsymbol{\sigma}_{/O} \triangleq \boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{p}$$

4.1. Moment cinétique par rapport à un point.

Le moment cinétique d'un solide ou d'un système dépend du point par rapport auquel il est calculé. En effet, soient O et O' deux points distincts d'un repère R, le moment cinétique par rapport au point O' d'un point massique M de quantité de mouvement $\mathbf{p}$ s'écrit :

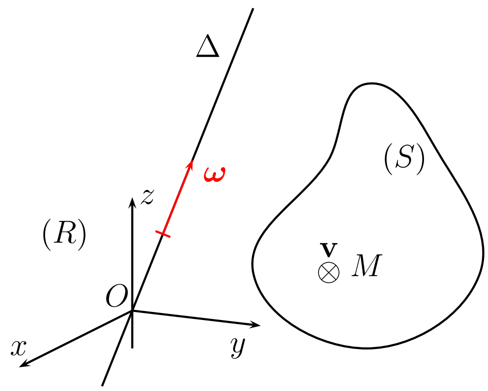
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{O'}(M) &= \mathbf{O'M} \times \mathbf{p} \\
&= (\mathbf{O'O} + \mathbf{OM}) \times \mathbf{p} \\
&= \mathbf{O'O} \times \mathbf{p} + \mathbf{OM} \times \mathbf{p} \\
&= \mathbf{O'O} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma}_O(M)
\end{aligned}$$



Le terme $\mathbf{O'O} \times \mathbf{p}$ permet de passer du moment cinétique au point O, à celui au point O'.

Soit un solide S de masse volumique ρ, tournant avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe Δ de direction fixe dans (R). Si le solide S est libre alors l'axe de rotation passe obligatoirement par son centre d'inertie G, mais l'on envisage ici le cas plus général de la rotation d'un solide autour d'un axe quelconque, le solide S étant relié à l'axe de rotation. Calculons le moment cinétique par rapport au centre du référentiel O situé sur l'axe Δ.

2. Voir Mecanique classique.pdf



Considérons un élément de volume du solide S, de masse dm, de volume d^3V, de vitesse $\mathbf{v}$, situé au point M. Son moment cinétique dans (R) par rapport au point O s'écrit :

$$d\boldsymbol{\sigma}_O^R(M) = \mathbf{OM} \times \mathbf{v}\, dm$$

L'axe de rotation Δ passant par le point O, la vitesse du point M s'écrit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM}$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma}_O^R(M) &= \mathbf{OM} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})\, dm \\ &= \rho\, \mathbf{OM} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})\, d^3V \end{aligned}$$

Le moment cinétique total du solide S s'obtient par intégration sur son volume total :

$$\boldsymbol{\sigma}_O^R(S) = \iiint \rho\, \mathbf{OM} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})\, d^3V$$

Développons le double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM}) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2 \\ \omega_y z^2 - \omega_z yz - \omega_x yx + \omega_y x^2 \\ \omega_z x^2 - \omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz \\ -\omega_x yx + \omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z yz \\ -\omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression du moment cinétique :

$$\boldsymbol{\sigma}_O^R(S) = \begin{pmatrix} \iiint \rho \left[\omega_x(y^2+z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz\right]\, d^3V \\ \iiint \rho \left[-\omega_x yx + \omega_y(x^2+z^2) - \omega_z yz\right]\, d^3V \\ \iiint \rho \left[-\omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z(x^2+y^2)\right]\, d^3V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_x \iiint \rho\,(y^2+z^2) d^3V - \omega_y \iiint \rho\, xy d^3V - \omega_z \iiint \rho\, xz d^3V \\ -\omega_x \iiint \rho\, xy d^3V + \omega_y \iiint \rho\,(x^2+z^2) d^3V - \omega_z \iiint \rho\, yz d^3V \\ -\omega_x \iiint \rho\, xz d^3V - \omega_y \iiint \rho\, yz d^3V + \omega_z \iiint \rho\,(x^2+y^2) d^3V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \iiint \rho\,(y^2+z^2) d^3V & -\iiint \rho\, xy d^3V & -\iiint \rho\, xz d^3V \\ -\iiint \rho\, xy d^3V & \iiint \rho\,(x^2+z^2) d^3V & -\iiint \rho\, yz d^3V \\ -\iiint \rho\, xz d^3V & -\iiint \rho\, yz d^3V & \iiint \rho\,(x^2+y^2) d^3V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Cette expression est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}_O^R(S) = [I]_O\, \boldsymbol{\omega}$$

où $[I]_O$ est le tenseur d'inertie du solide S, au point O dans le repère (R).

4.2. **Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation.** Soit $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation Δ :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}$$

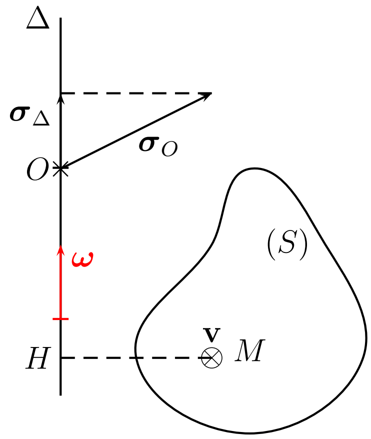
et soit $\sigma_\Delta^R(S)$ la projection du moment cinétique sur l'axe de rotation Δ. Soit MH la distance du point M à l'axe de rotation. En utilisant le théorème 6.2 de l'analyse vectorielle donné en annexe, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta^R(S) &= \boldsymbol{\sigma}_O^R(S) \cdot \mathbf{u} \\ &= \iiint \rho\, \mathbf{OM} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM})\, d^3V \cdot \mathbf{u} \\ &= \iiint \rho \left[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OM}) - \mathbf{OM}(\mathbf{OM} \cdot \boldsymbol{\omega})\right] d^3V \cdot \mathbf{u} \\ &= \omega \iiint \rho \left[\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\, (OM)^2 - (\mathbf{OM} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{u})\right] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho \left[(OM)^2 - (OH)^2\right] d^3V \\ &= \omega \iiint \rho\, (MH)^2\, d^3V \end{aligned}$$

Cette expression est de la forme :

$$\sigma_\Delta^R(S) = I_\Delta\, \omega \tag{3}$$

où le scalaire I_Δ est le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ.



4.3. **Lien entre tenseur d'inertie et moment d'inertie.**
Soit $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire porté par l'axe de rotation Δ. Alors :

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta^R(S) &= \boldsymbol{\sigma}_O^R(S)\cdot\mathbf{u}\\ &= [I]_O\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}\\ &= [I]_O\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,\omega\end{aligned}$$

Par conséquent, avec l'équation (3) :

$$I_\Delta = [I]_O\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$

Nous retrouvons l'équation (2).

5. Energie cinétique d'un solide

Soit O un point quelconque d'un référentiel inertiel (R). Soit S un solide de masse m, de volume V et de masse volumique ρ. On considère un élément du solide S, de masse dm, de volume d^3V situé au point M. Soient $\mathbf{v}$ sa vitesse en translation dans (R), et $\boldsymbol{\omega}$ sa vitesse de rotation. Son énergie cinétique dT s'écrit :

$$\begin{aligned}dT &= \tfrac{1}{2}\,v^2\,dm\\ &= \tfrac{\rho}{2}\,v^2\,d^3V\\ &= \tfrac{\rho}{2}\left(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM}\right)^2\,d^3V\\ &= \tfrac{\rho}{2}\left[\mathrm{v}^2+2\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})^2\right]\,d^3V\end{aligned}$$

L'énergie cinétique totale T s'obtient par intégration sur le volume total du solide S :

$$\begin{aligned}
T &= \iiint \tfrac{\rho}{2}\, \mathrm{v}^2\, d^3V + \iiint \rho\, \mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})\, d^3V + \iiint \tfrac{\rho}{2}\, (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})^2 d^3V\\
&= \mathrm{v}^2 \iiint \tfrac{\rho}{2}\, d^3V + \iiint \rho\, \mathbf{OM}(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})\, d^3V + \iiint \tfrac{\rho}{2}\, (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})^2 d^3V\\
&= \tfrac{m\mathrm{v}^2}{2} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) \iiint \rho\, \mathbf{OM}\, d^3V + \tfrac{1}{2} \iiint \rho\, (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OM})^2\, d^3V
\end{aligned}$$

Le premier terme est l'énergie cinétique de translation du solide S. En choisissant l'origine du système de coordonnées au centre d'inertie G du solide S, le deuxième terme s'annule car $\iiint \rho\, \mathbf{GM}\, d^3V = \mathbf{0}$. Calculons le dernier terme grâce au théorème 6.4 de l'analyse vectorielle donné en annexe :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{GM})^2 &= \omega^2(GM)^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{GM})^2\\
&= (\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x^2+y^2+z^2) - (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2\\
&= (\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x^2+y^2+z^2) - \big[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\\
&\qquad + 2\,(\omega_x x \omega_y y + \omega_x x \omega_z z + \omega_y y \omega_z z)\big]\\
&= \omega_x^2(y^2+z^2) + \omega_y^2(x^2+z^2) + \omega_z^2(x^2+y^2)\\
&\qquad - 2(\omega_x x \omega_y y + \omega_x x \omega_z z + \omega_y y \omega_z z)
\end{aligned}$$

Ce scalaire peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{GM})^2 &= \begin{pmatrix} \omega_x(y^2+z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz\\ -\omega_x yx + \omega_y(x^2+z^2) - \omega_z yz\\ -\omega_x zx - \omega_y zy + \omega_z(x^2+y^2)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où l'expression du dernier terme :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int \rho\,(y^2+z^2) d^3V & -\int \rho\, xy d^3V & -\int \rho\, xz d^3V\\ -\int \rho\, xy d^3V & \int \rho\,(x^2+z^2) d^3V & -\int \rho\, yz d^3V\\ -\int \rho\, xz d^3V & -\int \rho\, yz d^3V & \int \rho\,(x^2+y^2) d^3V\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique T s'écrit sous la forme :

$$T = \tfrac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \tfrac{1}{2}[I]_G\, \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

où $[I]_G$ est le tenseur d'inertie du solide S, au centre d'inertie G.

6. Annexe

Théorème 6.1. *Permutation circulaire*

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

Démonstration.

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix}$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= A_xB_yC_z - A_xB_zC_y + A_yB_zC_x - A_yB_xC_z + A_zB_xC_y - A_zB_yC_x$$

et,

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)C_x + (A_zB_x - A_xB_z)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z$$

$$= A_yB_zC_x - A_zB_yC_x + A_zB_xC_y - A_xB_zC_y + A_xB_yC_z - A_yB_xC_z$$

□

Théorème 6.2.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z) \\ A_z(B_yC_z - B_zC_y) - A_x(B_xC_y - B_yC_x) \\ A_x(B_zC_x - B_xC_z) - A_y(B_yC_z - B_zC_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_yB_xC_y - A_yB_yC_x - A_zB_zC_x + A_zB_xC_z \\ A_zB_yC_z - A_zB_zC_y - A_x(B_xC_y + A_xB_yC_x) \\ A_xB_zC_x - A_xB_xC_z - A_y(B_yC_z + A_yB_zC_y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \\
&\quad = \mathbf{B}(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \mathbf{C}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\
&\quad = \begin{pmatrix} B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ B_y(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_y(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ B_z(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - C_z(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} B_xA_yC_y + B_xA_zC_z - C_xA_yB_y - C_xA_zB_z) \\ B_yA_xC_x + B_yA_zC_z - C_yA_xB_x - C_yA_zB_z \\ B_zA_xC_x + B_zA_yC_y - C_zA_xB_x - C_zA_yB_y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Application. Pour $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{oM}$ et $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$, on a :

$$\mathbf{oM}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{oM}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{oM}\cdot\mathbf{oM}) - \mathbf{oM}(\mathbf{oM}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

Théorème 6.3.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

Démonstration.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

et avec le théorème 6.2, en remplaçant $\mathbf{A}$ par $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ par $\mathbf{A}$, et $\mathbf{C}$ par $\mathbf{B}$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= -[\mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})] \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\end{aligned}$$

□

Théorème 6.4.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

Démonstration. D'après le théorème 6.1 :

$$\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{X} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

On pose $\mathbf{X} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, alors

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}] \cdot \mathbf{D}$$

et avec le théorème 6.3 :

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})] - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})] \cdot \mathbf{D} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\end{aligned}$$

□

Application. Pour $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{GM}$, on a :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GM})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{GM} \cdot \mathbf{GM}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{GM})(\mathbf{GM} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \omega^2 (GM)^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{GM})^2\end{aligned}$$

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`