TRANSFORMATION DE FOURIER

OLIVIER CASTÉRA

Table des matières

1. Signal périodique à une fréquence

Exemple. Son pur émis par un diapason.
En un lieu donné, la variation de pression est une fonction sinusoïdale du temps :

$$S(t) = c\cos(2\pi f_0\, t - \phi_0)$$

où c est *l'amplitude* de la variation de pression, f_0 la fréquence du son émis, t le temps écoulé depuis un instant initial. En définissant la *pulsation* par $\omega_0 = 2\pi f_0$, nous avons :

$$S(t) = c\cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

$\phi = \omega t - \phi_0$ est la *phase* de l'onde de pression, et ϕ_0 la phase à l'instant initial. Puisqu'on ne considère qu'un seul signal, nous pouvons poser $\phi_0 = 0$:

$$S(t) = c\cos(\omega_0\, t) \tag{1}$$

Théorème 1. *Amplitude du signal*
L'amplitude du signal périodique à une fréquence est donnée par :

$$c = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(\omega_0 t)\, dt$$

où $T = 1/f_0$ est la période du signal.

Date: 21 juillet 2017.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(\omega_0 t)\,dt &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} c\cos^2(\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{c}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} 1+\cos(2\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{c}{T}\left\{T + \tfrac{1}{2\omega_0}\left[\sin 2\omega_0 t\right]_{t_0}^{t_0+T}\right\} \\
&= c + \tfrac{c}{4\pi}\left\{\sin[2\omega_0(t_0+T)] - \sin(2\omega_0 t_0)\right\} \\
&= c + \tfrac{c}{4\pi}\left[\sin(2\omega_0 t_0 + 4\pi) - \sin(2\omega_0 t_0)\right] \\
&= c
\end{aligned}$$

□

Théorème 2. *Complexification*
Le signal sinusoïdal peut être considéré comme la somme de deux signaux complexes d'amplitude $\frac{c}{2}$*, et de fréquences opposées* f_0 *et* $-f_0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
S(t) &= c\cos(\omega_0 t) \\
&= \tfrac{c}{2}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{c}{2}e^{-j\omega_0 t} \\
&= \tfrac{c}{2}e^{2\pi j f_0\, t} + \tfrac{c}{2}e^{-2\pi j f_0\, t}
\end{aligned}$$

□

2. Signal périodique à plusieurs fréquences

Théorème 3. *(Admis) Décomposition en série de Fourier*
Tout signal périodique $S(t)$ *de période* T *et de carré intégrable sur sa période* $\left(\int_0^T S(t)dt < +\infty\right)$ *est décomposable en série de Fourier :*

$$\begin{aligned}
S(t) &= c_0 + c_1\cos(\omega_0 t - \phi_1) + c_2\cos(2\omega_0 t - \phi_2) + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) \quad \textit{avec } \phi_0 = 0
\end{aligned}$$

La série de Fourier comporte :
- *un signal constant* c_0
- *une sinusoïde de fréquence* f_0 *appelée le fondamental*
- *une infinité de sinusoïdes de fréquences* nf_0 *multiples de* f_0*, non nécessairement en phase, appelées harmoniques*

Théorème 4. *Décomposition en somme de cosinus et de sinus*
La décomposition peut s'écrire en une somme de cosinus et de sinus :

$$\begin{aligned}
S(t) &= a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + b_1\sin(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)]
\end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t)\cos\phi_n + c_n \sin(n\omega_0 t)\sin\phi_n] \end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \triangleq c_n \cos\phi_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n \triangleq c_n \sin\phi_n \end{cases} \tag{2}$$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

□

Théorème 5. *Valeur des coefficients*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\,dt \\ b_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\,dt &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_0\,dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_1\cos(\omega_0 t)\,dt \\ &\quad + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b_1 \sin(\omega_0 t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_2\cos(2\omega_0 t)\,dt + \dots \\ &= a_0 \end{aligned}$$

a_0 est donc la valeur moyenne du signal. D'après les définitions 2 :

$$\begin{cases} a_0 \triangleq c_0 \cos\phi_0 \\ b_0 \triangleq c_0 \sin\phi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$
$$= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{m=0}^{+\infty}[a_m\cos(m\omega_0 t)+b_m\sin(m\omega_0 t)]\cos(n\omega_0 t)\,dt$$
$$= \frac{2}{T}\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_m\cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m\sin(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

Pour un n donné, m va de zéro à l'infini. Tant que $m \neq n$:

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt|_{m\neq n}$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_m\cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega t)\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m\sin(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T} a_m[\cos(m\omega_0 t + n\omega_0 t)+\cos(m\omega_0 t - n\omega_0 t)]\,dt\right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m[\sin(m\omega_0 t + n\omega_0 t)+\sin(m\omega_0 t - n\omega_0 t)]\,dt\right\}$$
$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{t_0}^{t_0+T} a_m\cos[(m+n)\omega_0 t]\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} a_m\cos[(m-n)\omega_0 t]\,dt\right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m[\sin[(m+n)\omega_0 t]\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m\sin[(m-n)\omega_0 t]\,dt\right\}$$
$$= 0$$

et lorsque $m = n$:

$$\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt|_{m=n}$$
$$= \frac{2}{T}\left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_n\cos^2(n\omega_0 t)\,dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_n\sin(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{T}\left\{a_n\int_{t_0}^{t_0+T} 1+\cos(2n\omega_0 t)\,dt + \frac{b_n}{2\pi n f_0}\left[\cos^2(n\omega_0 t)\right]_{t_0}^{t_0+T}\right\}$$
$$= \frac{a_n}{T}\left\{T + \frac{1}{2\omega_0}\left[\sin(2n\omega_0 t\right]_{t_0}^{t_0+T}\right\}$$
$$= a_n$$

De même pour les coefficients b_n. □

Remarque. Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a_n = c_n\cos\phi_n \\ b_n = c_n\sin\phi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \\ \tan \phi_n = \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n = \arctan \dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

Définition 1. *Spectre de fréquences*
Les représentations des couples (a_n, b_n) *ou* (c_n, ϕ_n) *sont appelées spectre de fréquences du signal* $S(t)$*. Quand le signal est périodique son spectre est un spectre de raies.*

Théorème 6. *Complexification*

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

où les coefficients A_n *sont appelés coefficients de Fourier.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \tfrac{1}{2} \left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right) + b_n \tfrac{1}{2j} \left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)\right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n)\, e^{-jn\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n)\, e^{jn\omega_0 t}\right] \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} & A_0 \triangleq a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & A_n \triangleq \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & A_n^* \triangleq \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n) \end{cases}$$

où A_n^* est le complexe conjugué de A_n.

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n^*\, e^{-jn\omega_0 t} + A_n\, e^{jn\omega_0 t}\right)$$

En remplaçant n par $-n$ dans le théorème 5 :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{-n} = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(-n\omega_0 t)\, dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{-n} = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin(-n\omega_0 t)\, dt \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_{-n} = a_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, & b_{-n} = -b_n \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} A_{-n} &= \tfrac{1}{2}(a_{-n} - j\, b_{-n}) \\ &= \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n) \\ &= A_n^* \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} S(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_{-n}\, e^{-jn\omega_0 t} + A_n\, e^{jn\omega_0 t}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n\, e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

□

D'après ce théorème, les coefficients de Fourier A_n contiennent toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

Remarque.

$$\begin{aligned} A_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\ &= \tfrac{1}{2}(c_n \cos\phi_n - j\, c_n \sin\phi_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\, c_n e^{-j\phi_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n^* &= \tfrac{1}{2}(a_n + j\, b_n) \\ &= \tfrac{1}{2}(c_n \cos\phi_n + j\, c_n \sin\phi_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\, c_n e^{j\phi_n} \end{aligned}$$

Théorème 7. *Valeur des coefficients de Fourier*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Démonstration. Avec le théorème 5 :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - j\, b_n) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt - j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega_0 t)\, dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\left[\cos(n\omega_0 t)\, dt - j\sin(n\omega_0 t)\right] dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt
\end{aligned}$$

□

Si le signal $S(t)$ n'est pas pair, on choisit τ tel que le signal $S_1(t) = S(t-\tau)$ soit pair. On effectue la transformation de Fourier de $S_1(t)$ puis on obtient la transformée de Fourier de $S(t)$ par changement de variable $t - \tau \to t$.

Théorème 8. *Signaux pairs*
Pour les signaux pairs :

$$\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = 0 \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 0 \\
a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\, dt \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = A_{-n}
\end{cases}$$

Démonstration. D'après le théorème 4,

$$\begin{cases}
S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[c_n\cos(n\omega_0 t)\cos\phi_n + c_n\sin(n\omega_0 t)\sin\phi_n] \\
S(-t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[c_n\cos(n\omega_0 t)\cos\phi_n - c_n\sin(n\omega_0 t)\sin\phi_n]
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(-t) \\
S(t) - S(-t) &= 0 \\
2c_n\sin(n\omega t)\sin\phi_n &= 0 \\
\sin\phi_n &= 0 \\
\phi_n &= 0 \pm k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
b_n &= c_n\sin\phi_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^{T+T} S(t)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} S(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt
\end{aligned}$$

Avec $b_n = 0$:

$$\begin{cases} A_n = a_n \\ A_n^* = a_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= A_n^* \\
&= A_{-n}
\end{aligned}$$

□

3. Signal quelconque (non périodique)

Ce signal peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période devient infiniment longue. Dans le domaine fréquentiel, son spectre devient continu. La fréquence du fondamental $f_0 = 1/T$ tend vers zéro et les fréquences des harmoniques nf_0 se rapprochent les unes des autres. La série de Fourier devient une intégrale.

Théorème 9. *(Admis) Décomposition en intégrale de Fourier*
Tout signal $S(t)$ de carré intégrable $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)dt < +\infty\right)$ est décomposable en intégrale de Fourier :

$$S(t) = \int_0^{+\infty} c(f)\cos[2\pi f\,t - \phi(f)]\,df$$

$S(t)$ est décomposée en une infinité de composantes sinusoïdales de fréquences infiniment proches et d'amplitudes infinitésimales $c(f)\,df$.

Théorème 10. *Décomposition en cosinus et sinus*

$$S(t) = \int_0^{+\infty} a(f)\cos(\omega t) - b(f)\sin(\omega t)\,df$$

Démonstration. Soit $\omega = 2\pi f$ la pulsation :

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_0^{+\infty} c(f)\cos[\omega t - \phi(f)]\,df \\
&= \int_0^{+\infty} c(f)\cos(\omega t)\cos\phi(f) - c(f)\sin(\omega t)\sin\phi(f)\,df
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(f) \triangleq c(f)\cos\phi(f) \\ b(f) \triangleq c(f)\sin\phi(f) \end{cases}$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} a(f)\cos(\omega t) - b(f)\sin(\omega t)]\,df$$

□

Théorème 11. *Valeur des coefficients (Admis).*

$$\begin{cases} a(f) = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\cos(\omega t)\,dt \\ b(f) = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\sin(\omega t)\,dt \end{cases}$$

Démonstration. Par analogie avec la démonstration du théorème 5. □

Remarque. Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a(f) = c(f)\cos\phi(f) \\ b(f) = c(f)\sin\phi(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(f)^2 = a(f)^2 + b(f)^2 \\ \tan\phi(f) = \dfrac{b(f)}{a(f)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(f) = \sqrt{a(f)^2 + b(f)^2} \\ \phi(f) = \arctan\dfrac{b(f)}{a(f)} \end{cases}$$

Théorème 12. *Complexification*

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)\,e^{2\pi jft}df$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{+\infty} a(f)\cos(\omega t) - b(f)\sin(\omega t)\,df \\ &= \int_0^{+\infty} a(f)\,\tfrac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) - b(f)\,\tfrac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)df \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\left[a(f) - j\,b(f)\right]e^{-j\omega t} + \tfrac{1}{2}\left[a(f) + j\,b(f)\right]e^{j\omega t}df \end{aligned}$$

On pose :

$$A(f) \triangleq \tfrac{1}{2}[a(f) - j\,b(f)]$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\, e^{2\pi jft} df + \int_0^{+\infty} A^*(f)\, e^{-2\pi jft} df$$

Or :

$$\begin{aligned} c(-f) &= \sqrt{a^2(-f) + b^2(-f)} \\ &= \sqrt{a^2 + [-b(f)]^2} \\ &= c(f) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \phi(-f) &= \arctan\left[\frac{b(-f)}{a(-f)}\right] \\ &= -\arctan\left[\frac{b(f)}{a(f)}\right] \\ &= -\phi(f) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A(f) &= \tfrac{1}{2}[a(f) - j\, b(f)] \\ &= \tfrac{1}{2}[c(f)\cos\phi(f) - j\, c(f)\sin\phi(f)] \\ &= \tfrac{1}{2}\, c(f)\, e^{-j\phi(f)} \\ A(-f) &= \tfrac{1}{2}\, c(-f)\, e^{-j\phi(-f)} \\ &= \tfrac{1}{2}\, c(f)\, e^{j\phi(f)} \\ &= A^*(f) \end{aligned}$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)\, e^{2\pi jft} df$$

□

D'après ce théorème, la transformée de Fourier $A(f)$ contient toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

Définition 2. *Transformée de Fourier*
$A(f)$ est appelée transformée de Fourier de $S(t)$. La représentation spectrale du signal $S(t)$ est celle des fonctions $c(f)$ et $\phi(f)$, qui sont respectivement le double du module et l'argument changé de signe de $A(f)$.
$S(t)$ est appelée transformée de Fourier inverse de $A(f)$.

Théorème 13. *Expression de la transformée de Fourier*

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\, e^{-2\pi jft} dt$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} A(f) &= \tfrac{1}{2}[a(f) - j\,b(f)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\cos(\omega t)\,dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\sin(\omega t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,e^{-2\pi j f t}dt \end{aligned}$$

$\square$

Notation.
La transformée de Fourier $A(f)$ est habituellement notée $\hat{S}(f)$.

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`