

TRANSFORMATION DE FOURIER

OLIVIER CASTÉRA

TABLE DES MATIÈRES

1. Signal périodique à une fréquence	1
2. Signal périodique à plusieurs fréquences	2
3. Signal quelconque (non périodique)	8

1. SIGNAL PÉRIODIQUE À UNE FRÉQUENCE

Exemple. Son pur émis par un diapason.

En un lieu donné, la variation de pression est une fonction sinusoïdale du temps :

$$S(t) = c \cos(2\pi f_0 t - \phi_0)$$

où c est l'amplitude de la variation de pression, f_0 la fréquence du son émis, t le temps écoulé depuis un instant initial. En définissant la pulsation par $\omega_0 = 2\pi f_0$, nous avons :

$$S(t) = c \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

$\phi = \omega t - \phi_0$ est la phase de l'onde de pression, et ϕ_0 la phase à l'instant initial. Puisqu'on ne considère qu'un seul signal, nous pouvons poser $\phi_0 = 0$:

$$S(t) = c \cos(\omega_0 t) \tag{1}$$

Théorème 1. Amplitude du signal

L'amplitude du signal périodique à une fréquence est donnée par :

$$c = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(\omega_0 t) dt$$

où $T = 1/f_0$ est la période du signal.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(\omega_0 t) dt &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} c \cos^2(\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{c}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 1 + \cos(2\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{c}{T} \left\{ T + \frac{1}{2\omega_0} [\sin 2\omega_0 t]_{t_0}^{t_0+T} \right\} \\
 &= c + \frac{c}{4\pi} \{ \sin[2\omega_0(t_0 + T)] - \sin(2\omega_0 t_0) \} \\
 &= c + \frac{c}{4\pi} [\sin(2\omega_0 t_0 + 4\pi) - \sin(2\omega_0 t_0)] \\
 &= c
 \end{aligned}$$

□

Théorème 2. Complexification

Le signal sinusoïdal peut être considéré comme la somme de deux signaux complexes d'amplitude $\frac{c}{2}$, et de fréquences opposées f_0 et $-f_0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 S(t) &= c \cos(\omega_0 t) \\
 &= \frac{c}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{c}{2} e^{-j\omega_0 t} \\
 &= \frac{c}{2} e^{2\pi j f_0 t} + \frac{c}{2} e^{-2\pi j f_0 t}
 \end{aligned}$$

□

2. SIGNAL PÉRIODIQUE À PLUSIEURS FRÉQUENCES

Théorème 3. Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique $S(t)$ de période T est décomposable en série de Fourier (Admis) :

$$\begin{aligned}
 S(t) &= c_0 + c_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) + c_2 \cos(2\omega_0 t - \phi_2) + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) \quad \text{avec } \phi_0 = 0
 \end{aligned}$$

La série de Fourier comporte :

- un signal constant c_0
- une sinusoïde de fréquence f_0 appelée le fondamental
- une infinité de sinusoïdes de fréquences $n f_0$ multiples de f_0 , non nécessairement en phase, appelées harmoniques

Théorème 4. Décomposition en somme de cosinus et de sinus

La décomposition peut s'écrire en une somme de cosinus et de sinus :

$$\begin{aligned}
 S(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]
 \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t) \cos \phi_n + c_n \sin(n\omega_0 t) \sin \phi_n] \end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_n \triangleq c_n \cos \phi_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, & b_n \triangleq c_n \sin \phi_n \end{cases} \quad (2)$$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

□

Théorème 5. *Valeur des coefficients*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) dt \\ b_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_0 dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_1 \cos(\omega_0 t) dt \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} b_1 \sin(\omega_0 t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_2 \cos(2\omega_0 t) dt + \dots \\ &= a_0 \end{aligned}$$

a_0 est donc la valeur moyenne du signal. D'après les définitions 2 :

$$\begin{cases} a_0 \triangleq c_0 \cos \phi_0 \\ b_0 \triangleq c_0 \sin \phi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{m=0}^{+\infty} [a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)] \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{2}{T} \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right]
\end{aligned}$$

Pour un n donné, m va de zéro à l'infini. Tant que $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt |_{m \neq n} \\
&= \frac{2}{T} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} a_m [\cos(m\omega_0 t + n\omega_0 t) + \cos(m\omega_0 t - n\omega_0 t)] dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m [\sin(m\omega_0 t + n\omega_0 t) + \sin(m\omega_0 t - n\omega_0 t)] dt \right\} \\
&= \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos[(m+n)\omega_0 t] dt + \int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos[(m-n)\omega_0 t] dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m [\sin[(m+n)\omega_0 t] dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_m \sin[(m-n)\omega_0 t] dt \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et lorsque $m = n$:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt |_{m=n} \\
&= \frac{2}{T} \left[\int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cos^2(n\omega_0 t) dt + \int_{t_0}^{t_0+T} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] \\
&= \frac{1}{T} \left\{ a_n \int_{t_0}^{t_0+T} 1 + \cos(2n\omega_0 t) dt + \frac{b_n}{2\pi n f_0} [\cos^2(n\omega_0 t)]_{t_0}^{t_0+T} \right\} \\
&= \frac{a_n}{T} \left\{ T + \frac{1}{2\omega_0} [\sin(2n\omega_0 t)]_{t_0}^{t_0+T} \right\} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

De même pour les coefficients b_n . □

Remarque. Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a_n = c_n \cos \phi_n \\ b_n = c_n \sin \phi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \\ \tan \phi_n = \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

Définition 1. *Spectre de fréquences*

Les représentations des couples (a_n, b_n) ou (c_n, ϕ_n) sont appelées spectre de fréquences du signal $S(t)$. Quand le signal est périodique son spectre est un spectre de raies.

Théorème 6. *Complexification*

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}$$

où les coefficients A_n sont appelés coefficients de Fourier.

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n + j b_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} A_0 \triangleq a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n \triangleq \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n^* \triangleq \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \end{cases}$$

où A_n^* est le complexe conjugué de A_n .

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^* e^{-jn\omega_0 t} + A_n e^{jn\omega_0 t})$$

En remplaçant n par $-n$ dans le théorème 5 :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{-n} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(-n\omega_0 t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{-n} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin(-n\omega_0 t) dt \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_{-n} = a_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, & b_{-n} = -b_n \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} A_{-n} &= \frac{1}{2}(a_{-n} - j b_{-n}) \\ &= \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \\ &= A_n^* \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} S(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + A_n e^{jn\omega_0 t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

□

D'après ce théorème, les coefficients de Fourier A_n contiennent toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

Remarque.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \\ &= \frac{1}{2}(c_n \cos \phi_n - j c_n \sin \phi_n) \\ &= \frac{1}{2} c_n e^{-j\phi_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n^* &= \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \\ &= \frac{1}{2}(c_n \cos \phi_n + j c_n \sin \phi_n) \\ &= \frac{1}{2} c_n e^{j\phi_n} \end{aligned}$$

Théorème 7. *Valeur des coefficients de Fourier*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad A_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Démonstration. Avec le théorème 5 :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \\
&= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) [\cos(n\omega_0 t) dt - j \sin(n\omega_0 t)] dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-jn\omega_0 t} dt
\end{aligned}$$

□

Si le signal $S(t)$ n'est pas pair, on choisit τ tel que le signal $S_1(t) = S(t - \tau)$ soit pair. On effectue la transformation de Fourier de $S_1(t)$ puis on obtient la transformée de Fourier de $S(t)$ par changement de variable $t - \tau \rightarrow t$.

Théorème 8. *Signaux pairs*

Pour les signaux pairs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 0 \\ a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = A_{-n} \end{array} \right.$$

Démonstration. D'après le théorème 4,

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t) \cos \phi_n + c_n \sin(n\omega_0 t) \sin \phi_n] \\ S(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t) \cos \phi_n - c_n \sin(n\omega_0 t) \sin \phi_n] \end{array} \right.$$

$$S(t) = S(-t)$$

$$S(t) - S(-t) = 0$$

$$2c_n \sin(n\omega t) \sin \phi_n = 0$$

$$\sin \phi_n = 0$$

$$\phi_n = 0 \pm k\pi \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et,

$$\begin{aligned}
b_n &= c_n \sin \phi_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{T+T} S(t) dt \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} S(t) \cos(n\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

Avec $b_n = 0$:

$$\begin{cases} A_n = a_n \\ A_n^* = a_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^* \\ &= A_{-n} \end{aligned}$$

□

3. SIGNAL QUELCONQUE (NON PÉRIODIQUE)

Ce signal peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période devient infiniment longue. Dans le domaine fréquentiel, son spectre devient continu. La fréquence du fondamental $f_0 = 1/T$ tend vers zéro et les fréquences des harmoniques nf_0 se rapprochent les unes des autres. La série de Fourier devient une intégrale :

$$S(t) = \int_0^{+\infty} c(f) \cos[2\pi f t - \phi(f)] df$$

et est la décomposition de $S(t)$ en un nombre infini de composantes sinusoïdales de fréquences infiniment proches et d'amplitudes infinitésimales $c(f) df$.

Théorème 9. *Décomposition en cosinus et sinus*

$$S(t) = \int_0^{+\infty} a(f) \cos(\omega t) - b(f) \sin(\omega t) df$$

Démonstration. Soit $\omega = 2\pi f$ la pulsation :

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_0^{+\infty} c(f) \cos[\omega t - \phi(f)] df \\
&= \int_0^{+\infty} c(f) \cos(\omega t) \cos \phi(f) - c(f) \sin(\omega t) \sin \phi(f) df
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(f) \triangleq c(f) \cos \phi(f) \\ b(f) \triangleq c(f) \sin \phi(f) \end{cases}$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} [a(f) \cos(\omega t) - b(f) \sin(\omega t)] df$$

□

Théorème 10. *Valeur des coefficients (Admis).*

$$\begin{cases} a(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \cos(\omega t) dt \\ b(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \sin(\omega t) dt \end{cases}$$

Démonstration. Par analogie avec la démonstration du théorème 5. □

Remarque. Amplitude et phase de chaque fréquence

$$\begin{cases} a(f) = c(f) \cos \phi(f) \\ b(f) = c(f) \sin \phi(f) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(f)^2 = a(f)^2 + b(f)^2 \\ \tan \phi(f) = \frac{b(f)}{a(f)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(f) = \sqrt{a(f)^2 + b(f)^2} \\ \phi(f) = \arctan \frac{b(f)}{a(f)} \end{cases}$$

Théorème 11. *Complexification*

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) e^{2\pi j f t} df$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{+\infty} [a(f) \cos(\omega t) - b(f) \sin(\omega t)] df \\ &= \int_0^{+\infty} a(f) \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) - b(f) \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) df \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} [a(f) - j b(f)] e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} [a(f) + j b(f)] e^{j\omega t} df \end{aligned}$$

On pose :

$$A(f) \triangleq \frac{1}{2} [a(f) - j b(f)]$$

$$S(t) = \int_0^{+\infty} A(f) e^{2\pi j f t} df + \int_0^{+\infty} A^*(f) e^{-2\pi j f t} df$$

Or :

$$\begin{aligned} c(-f) &= \sqrt{a^2(-f) + b^2(-f)} \\ &= \sqrt{a^2 + [-b(f)]^2} \\ &= c(f) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \phi(-f) &= \arctan \left[\frac{b(-f)}{a(-f)} \right] \\ &= -\arctan \left[\frac{b(f)}{a(f)} \right] \\ &= -\phi(f) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{1}{2}[a(f) - j b(f)] \\ &= \frac{1}{2}[c(f) \cos \phi(f) - j c(f) \sin \phi(f)] \\ &= \frac{1}{2} c(f) e^{-j\phi(f)} \\ A(-f) &= \frac{1}{2} c(-f) e^{-j\phi(-f)} \\ &= \frac{1}{2} c(f) e^{j\phi(f)} \\ &= A^*(f) \end{aligned}$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) e^{2\pi j f t} df$$

□

D'après ce théorème, la transformée de Fourier $A(f)$ contient toute l'information pour retrouver le signal $S(t)$.

Définition 2. *Transformée de Fourier*

$A(f)$ est appelée transformée de Fourier de $S(t)$. La représentation spectrale du signal $S(t)$ est celle des fonctions $c(f)$ et $\phi(f)$, qui sont respectivement le double du module et l'argument changé de signe de $A(f)$.

$S(t)$ est appelée transformée de Fourier inverse de $A(f)$.

Théorème 12. *Expression de la transformée de Fourier*

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} A(f) &= \frac{1}{2}[a(f) - j b(f)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-2\pi j f t} dt \end{aligned}$$

□

Notation.

La transformée de Fourier $A(f)$ est habituellement notée $\hat{S}(f)$.

E-mail address: `o.castera@free.fr`

URL: `http://o.castera.free.fr/`