TRANSFORMATION DE LEGENDRE

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. La transformation de Legendre permet d'exprimer une fonction grâce à l'enveloppe de ses tangentes.

TABLE DES MATIÈRES

1. EQUATION DE LA TANGENTE EN UN POINT

Soit $M(x_M, y_M)$ un point quelconque d'une fonction $y = f(x)$. Cherchons l'équation de la tangente à f au point M, autrement dit cherchons les paramètres a et b de la droite $y = ax + b$ tracée sur la figure (1) :

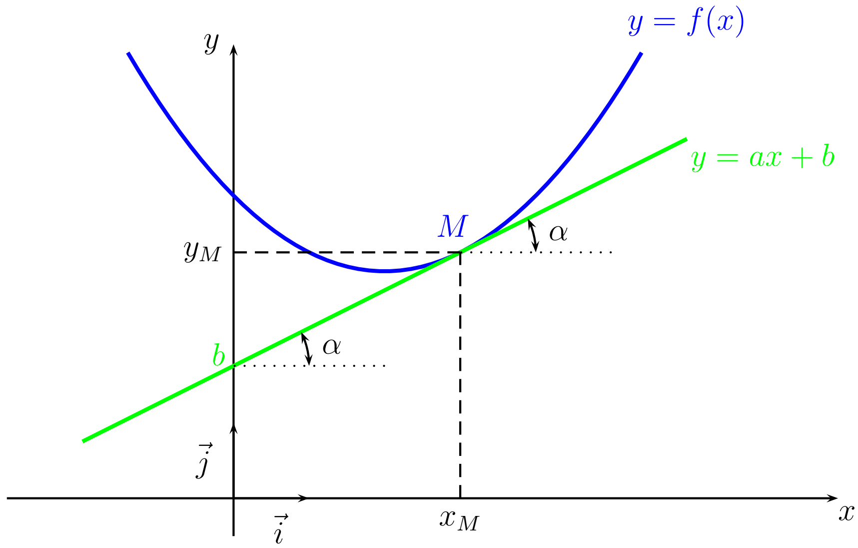

FIGURE 1. Tangente à une courbe

Date: 4 mai 2015.

Par définition, la dérivée de f au point M est égale à la tangente de l'angle α que fait la tangente à f au point M avec l'horizontale :

$$\begin{aligned} f'(x_M) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_M+h)-f(x_M)}{h} \\ &= \tan\alpha \end{aligned}$$

Or, en prenant l'équation de la tangente au point M, on a :

$$y_M = a\,x_M + b$$

si bien que,

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_M - b}{x_M - 0} \\ &= \tan\alpha \\ &= f'(x_M) \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} b &= y_M - a\,x_M \\ &= f(x_M) - a\,x_M \\ &= f(x_M) - f'(x_M)\,x_M \end{aligned} \tag{1}$$

Ayant les deux paramètres a et b, nous pouvons écrire l'équation de la tangente en M :

$$y = f'(x_M)\,x + f(x_M) - f'(x_M)\,x_M$$

2. Equation de l'enveloppe

Nous cherchons l'équation de toutes les tangentes, autrement dit, b en fonction de a. Pour cela nous repartons de l'équation (1) :

$$b(a) = f(x_M) - a\,x_M$$

Mais le point M parcourt alors toute la courbe f, et x_M devient une variable :

$$b(a) = f(x) - a\,x$$

Comme a est la nouvelle variable, il nous reste à exprimer $f(x)$ et x en fonction de a. Pour cela il nous faut l'expression de la fonction f.

Exemple. Trouver la transformée de Legendre de $f(x) = x^2$.
La nouvelle variable a s'écrit :

$$\begin{aligned} a &= f'(x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

On exprime $f(x)$ en fonction de a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ &= \frac{(2x)^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

On exprime x en fonction de a :

$$x = \frac{a}{2}$$

La transformée de Legendre de $f(x)$ est alors :

$$\begin{aligned} b(a) &= f(x) - a\,x \\ &= \frac{a^2}{4} - a \times \frac{a}{2} \\ &= -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

On retiendra que dans toute transformation de Legendre, la nouvelle variable a est la dérivée de la fonction de départ $f(x)$ par rapport à l'ancienne variable x.

3. Involution de la transformation de Legendre

Si l'on applique deux fois la transformation de Legendre, on retombe sur la fonction de départ. En effet, la transformée de Legendre de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$b(a) = f(x) - a\,x$$

Si l'on applique de nouveau la transformation de Legendre, la nouvelle variable, notée n, est telle que :

$$\begin{aligned} n &= \frac{d}{da}\,b(a) \\ &= \frac{d}{da} f(x) - x - a\,\frac{dx}{da} \end{aligned}$$

et la transformée de Legendre de $b(a)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} g(n) &= b(a) - n\,a \\ &= f(x) - a\,x - \left[\frac{d}{da}\,f(x) - x - a\,\frac{dx}{da}\right] a \\ &= f(x) - \left[\frac{d}{da}\,f(x) - \frac{d}{dx}\,f(x)\,\frac{dx}{da}\right] a \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Nous en concluons que la transformation de Legendre ne perd ni n'ajoute d'information à la fonction de départ.

Exemple. Poursuivons le premier exemple, et cherchons la transfomée de Legendre de $b(a) = -a^2/4$. La nouvelle variable n s'écrit :

$$\begin{aligned} n &= b'(a) \\ &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

On exprime $b(a)$ en fonction de n :

$$b(a) = -n^2$$

On exprime a en fonction de n :

$$a = -2n$$

La transformée de Legendre de $b(a)$ est alors :

$$\begin{aligned} g(n) &= b(a) - n\,a \\ &= -n^2 + 2n^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

On retrouve la propriété d'involution de la transformée de Legendre.

E-mail address: o.castera@free.fr
URL: http://o.castera.free.fr/