TRIGONOMÉTRIE

OLIVIER CASTÉRA

RÉSUMÉ. Démonstration des principales formules de trigonométrie

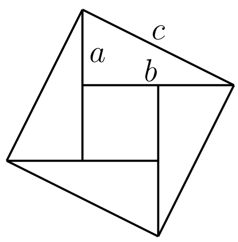
TABLE DES MATIÈRES

1. IDENTITÉ DE PYTHAGORE

Théorème 1.1. *Théorème de Pythagore*
Le carré de l'hypothénus d'un triangle rectangle est égale à la somme des carrés des autres côtés.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Démonstration. Exprimons la surface totale de la figure ci-dessous :



$$S = c^2$$

Date: 1er mars 2014.

Or S est aussi la surface des quatre triangles et du carré central :

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \tfrac{1}{2}ab + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= b^2 + a^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

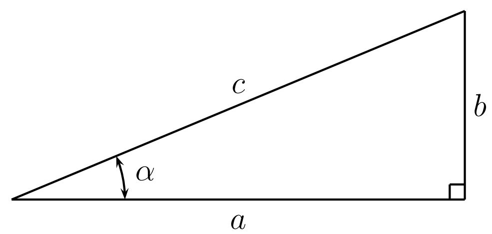
□

Définition 1.1. Fonctions trigonométriques
Dans le triangle rectangle ci-dessous, on définit les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente :

$$\begin{cases} \sin\alpha \triangleq \dfrac{b}{c} \\ \cos\alpha \triangleq \dfrac{a}{c} \\ \tan\alpha \triangleq \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

si bien que :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Théorème 1.2. *Identité de Pythagore*

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Démonstration. A partir du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

□

1.1. **Expression de sinus et cosinus en fonction de tangente.**

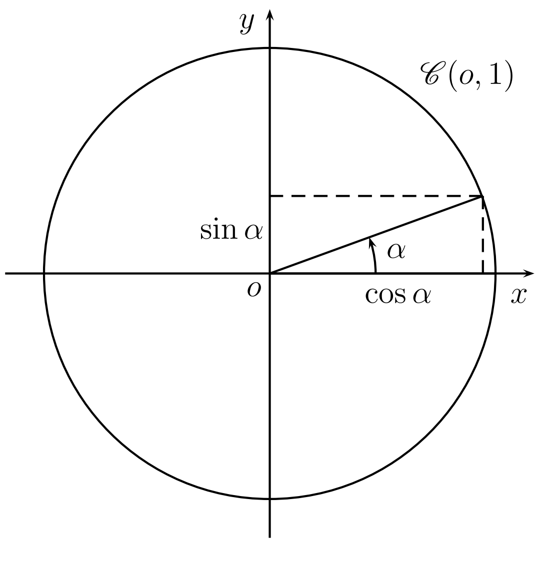
$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} \\ \qquad = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\ \qquad = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\ \cos\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}/\cos\alpha} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \end{cases} \tag{1}$$

2. Cercle trigonométrique

On pose $c \neq 0$ pour s'assurer de l'existence du triangle. Par changement d'unité de longueur, nous posons $c = 1$ sans perte de généralité :

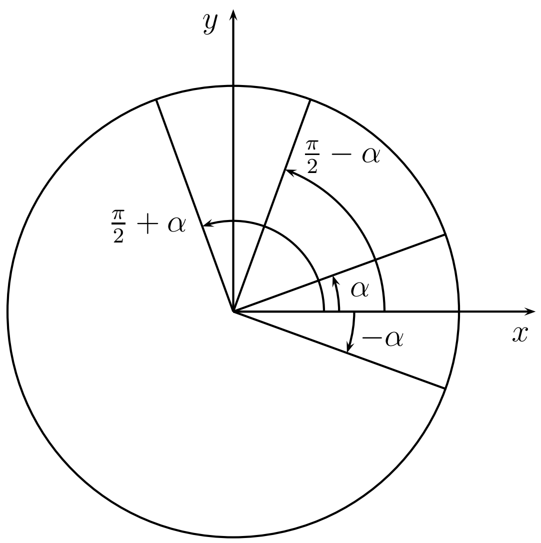
- si $\alpha = 0$ alors $b = 0$ et $a = c$.
- si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $a = 0$, $b = c$, et $\tan\alpha$ n'est plus définie.

Pour $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ou pour $\alpha < 0$, le triangle n'est plus défini. Nous redéfinissons les fonctions trigonométriques comme la projection perpendiculaire d'un segment de longueur unité sur les axes de coordonnées. On obtient alors le cercle trigonométrique :



2.1. Parité des fonctions trigonométriques.

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} \\ \qquad\qquad = -\tan\alpha \end{cases}$$



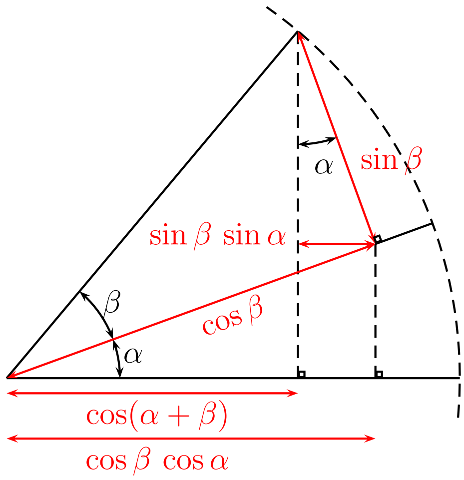
2.2. Relations entre sinus et cosinus.

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \end{cases}$$

3. Addition de deux angles

Théorème 3.1.

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$



Démonstration. Sur la figure ci-dessus, on retrouve l'angle α car les droites sont perpendiculaires deux à deux. Par conséquent :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

En remplaçant α par $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans la relation (2) :

$$\begin{aligned}\cos[(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)+\beta] &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta - \sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Pour la fonction tangente :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta/(\cos\alpha\cos\beta) + \cos\alpha\sin\beta/(\cos\alpha\cos\beta)}{1 - \sin\alpha\sin\beta/(\cos\alpha\cos\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

En remplaçant β par $-\beta$:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

□

L'identité (2) est la plus antisymétrique, c'est la seule à retenir.

3.1. **Angle double.** En posant $\beta = \alpha$ dans le théorème 3.1 :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \qquad\quad\; = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \qquad\quad\; = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{cases}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha} \\ &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} \\ &= \frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha} \\ &= \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \\ &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \end{aligned}$$

En les identités (1) :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \qquad\quad\; = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} - \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \qquad\quad\; = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \qquad\quad\; = 2\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\ \qquad\quad\; = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$$

3.2. **Transformation de produits en sommes.** A partir du théorème 3.1, on déduit :

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\ \sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \end{cases} \tag{3}$$

3.3. **Réduction du carré.** En posant $\alpha = \beta$ dans les identités précédentes :

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \frac{1}{2}[\cos(2\alpha)+1] \\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)] \end{cases}$$

d'où :

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)+1}$$

3.4. **Transformation de sommes en produits.** Dans les relations (3), en posant $\gamma = \alpha+\beta$ et $\delta = \alpha-\beta$, c'est à dire, $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma+\delta)$ et $\beta = \frac{1}{2}(\gamma-\delta)$, on a :

$$\begin{cases} \cos\gamma+\cos\delta = 2\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2}\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} \\ \cos\delta-\cos\gamma = 2\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}\sin\dfrac{\gamma-\delta}{2} \\ \sin\gamma+\sin\delta = 2\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2} \\ \sin\gamma-\sin\delta = 2\sin\dfrac{\gamma-\delta}{2}\cos\dfrac{\gamma+\delta}{2} \end{cases}$$

4. Formule de De Moivre

Le développement en série de la fonction cosinus s'écrit :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

et celui de la fonction sinus s'écrit :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Le développement en série de la fonction exponentielle s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

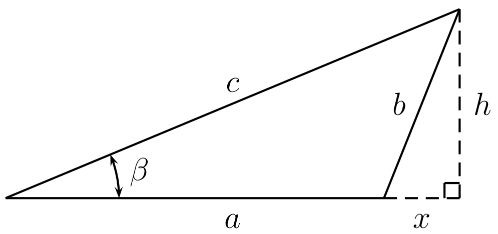
si bien que :

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

5. Loi des cosinus

Théorème 5.1. *Dans le triangle quelconque :*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$



Démonstration. Nous avons :

$$\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{h}{c} \\ \cos\beta = \dfrac{a+x}{c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ &= (c\sin\beta)^2 + (c\cos\beta - a)^2 \\ &= c^2\sin^2\beta + c^2\cos^2\beta - 2ac\cos\beta + a^2 \\ &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \end{aligned}$$

□

Remarque. Angle

Pour tout cercle, on remarque que la circonférence $\mathcal{C}$ est proportionnelle au diamètre D. Le coefficient de proportionnalité est noté π et l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

où r est le rayon du cercle. Une longueur quelconque l d'un arc de cercle est par conséquent elle aussi proportionnelle au rayon du cercle :

$$l = \alpha r$$

On appelle α l'angle sous lequel on voit l'arc de longueur l depuis le centre du cercle. α est le rapport de deux longueur, il n'a donc pas de dimension, mais il a une unité, le radian. Quand $l = \mathcal{C}$, $\alpha = 2\pi$.

E-mail address: `o.castera@free.fr`
URL: `http://o.castera.free.fr/`